Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Bianchi

Le reti di Tchebychef sulle superficie ed il parallelismo nel senso di Levi-Civita

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.0, p. 11–16.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_0_11_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana,
1922.

PICCOLE NOTE

A titolo di saggio delle *Piccole Note* di carattere scientifico, che verranno pubblicate nella prima parte del Bollettino, siamo lieti di poterne presentare due: la prima, dell'illustre Maestro della Scuola pisana, prof. Luigi Bianchi; la seconda, del distinto professore di idraulica della R. Scuola d'Applicazione di Bologna, ing. U. Puppini (1).

Le reti di Tchebychef sulle superficie ed il parallelismo nel senso di Levi-Civita.

Nota di LUIGI BIANCHI

In una memoria pubblicata nel 1917 nel T. 42 dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, il Levi-Civita ha introdotto, nella metrica generale degli spazî curvi, una nuova nozione a cui ha dato il nome di *parallelismo* nella varietà V_n, nozione che già nella memoria stessa dell'autore, come nella successiva dello stesso Tomo dovuta al Severi, e nelle più recenti ricerche del Bompiani (T. 80 degli Atti dell'Istituto Veneto 1920-21), si dimostra importante e feconda (2).

In questa nota, restando nel campo delle superficie, mi limito a semplici osservazioni che hanno principalmente lo scopo di collegare il noto problema di Tchebychef di *rivestire* una data superficie (3) colla nuova nozione di parallelismo nel senso di Levi-Civita.

(1) Queste Note verranno riprodotte nel primo numero del Bollettino.

(2) La scelta del nome invece non sembra felice poichè (salvo nel caso dello spazio euclideo ove si riduce alla nozione di parallelismo ordinario) questa specie di parallelismo è essenzialmente *vincolata al cammino*, lungo il quale avviene il trasporto della direzione iniziale. Si consideri poi che nel caso degli spazii a curvatura costante (non nulla) il nome di parallelismo ha già un significato assoluto che non concorda affatto col nuovo.

(3) Cfr. DARBOUX, *Leçons*, T. III, pp. 133 e 206 e le mie Lezioni (3.ª Edizione 1922) §§ 60, 62.

Per un dato ds^2 a due variabili

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \tag{1}$$

ci domandiamo:

Quando accade che lungo ciascuna linea $u = \text{cost}^{\text{te}}$ *le direzioni delle linee* $v = \text{cost}^{\text{te}}$ *riescono parallele nel senso di Levi-Civita?*

Dette ξ_1, ξ_2 le costanti di direzione, e posto per simmetria

$$u = u_1, \quad v = u_2,$$

le equazioni che reggono il trasporto per parallelismo vincolato della direzione (ξ_1, ξ_2), *lungo una linea qualunque L,* sono le fondamentali

$$d\xi_i + \sum_{\lambda,\mu} \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} \xi_\lambda du_\mu = 0, \qquad (i = 1, 2), \tag{2}$$

dove i differenziali sono presi lungo L, e i simboli $\left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\}$ si riferiscono alla forma differenziale (1). Se per linea L prendiamo una $u = \text{cost}^{\text{te}}$, le (2) diventano

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial v} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} \xi_\lambda \frac{\partial u_\mu}{\partial v} = 0,$$

ossia, avendosi $\frac{\partial u_1}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial v} = 1$:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial v} + \sum_{\lambda} \left\{ {2\lambda \atop i} \right\} \xi_\lambda = 0. \tag{3}$$

Ma per la direzione della $v = \text{cost}^{\text{te}}$ si ha

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad \xi_2 = 0,$$

onde la (3) per $i = 2$ dà

$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0, \tag{4}$$

mentre l'altra (3) per $i = 1$ si scrive

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) + \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{1}{\sqrt{E}} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2E \left\{ {12 \atop 1} \right\},$$

ed è una conseguenza della (4), in forza dell'identità

$$\frac{\partial F}{\partial v}=2\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}=2\left[E\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+F\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right].$$

Dunque: *Nel sistema* (u, v) *le tangenti alle* $v=\text{cost}^{\text{te}}$ *lungo ciascuna* $u=\text{cost}^{\text{te}}$ *sono parallele nel senso di Levi-Civita allora ed allora soltanto che si trova verificata la* (4)

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=0.$$

Se si immagina ora che il ds^2, dato dalla (1), appartenga ad una superficie Σ dello spazio ordinario, la medesima condizione (4) è suscettibile di un altro significato geometrico equivalente a quello già segnalato dal sig. A. Myller in una recente nota (1), e cioè: *Ogni rigata R formata dalle tangenti alle* $v=\text{cost}^{\text{te}}$ *lungo una medesima linea* $u=\text{cost}^{\text{te}}$ *ha quest'ultima linea per linea di stringimento.*

E infatti i coseni di direzione delle tangenti alle linee $v=\text{cost}^{\text{te}}$ sono dati (nelle consuete notazioni) da

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

e la condizione che sulla rigata R la linea $u=\text{cost}^{\text{te}}$ sia la linea di stringimento si scrive

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{EG-F^2}{E\sqrt{E}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=0,$$

onde equivale precisamente alla (4).

Risulta di qui che in un doppio sistema di linee (u, v) della specie considerata si possono dare ad arbitrio le $v=\text{cost}^{\text{te}}$ e ne restano individuate le linee $u=\text{cost}^{\text{te}}$ del primo sistema, come le *seconde* linee di stringimento situate su Σ di rigate entro la congruenza C delle tangenti alle linee $v=\text{cost}^{\text{te}}$ (2). Partendo da queste considerazioni, e supposto dato un qualunque sistema di linee

$$\varphi(u, v)=\text{cost}^{\text{te}}$$

sopra Σ, è facile formare l'equazione differenziale del 1.° ordine

(1) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* Tomo 174, p. 997.

(2) V. il § 283, Volume II (2.ª Edizione) delle mie *Lezioni di geometria differenziale.*

le cui linee integrali sono le seconde linee di stringimento per le rigate della congruenza C delle tangenti alle $\varphi = \text{cost}^{\text{te}}$. Si trova, con breve calcolo, che la detta equazione differenziale si scrive:

$$(a) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\varphi_{11} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\varphi_{12}\right)du + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\varphi_{12} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\varphi_{22}\right)dv = 0,$$

i simboli φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} indicando al solito le derivate seconde covarianti di φ.

Se le linee $\varphi = \text{cost}^{\text{te}}$ non sono date in termini finiti, ma solo come linee integrali dell'equazione differenziale del 1.° ordine

$$Mdu + Ndv = 0,$$

si potrà formare egualmente l'equazione differenziale

$$M_1 du + N_1 dv = 0$$

delle seconde linee di stringimento dalle formole:

$$(b) \left\{ \begin{aligned} M_1 &= N\left[\frac{\partial M}{\partial u} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} M - \left\{ {11 \atop 2} \right\} N\right] - M\left[\frac{\partial N}{\partial u} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} M - \left\{ {12 \atop 2} \right\} N\right], \\ N_1 &= N\left[\frac{\partial M}{\partial v} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} M - \left\{ {12 \atop 2} \right\} N\right] - M\left[\frac{\partial N}{\partial v} - \left\{ {22 \atop 1} \right\} M - \left\{ {22 \atop 2} \right\} N\right]. \end{aligned} \right.$$

Un secondo problema (di indeterminazione molto maggiore) si ha se in un sistema (u, v) della specie considerata $\left(\text{con} \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0\right)$ si suppongono invece date le $u = \text{cost}^{\text{te}}$, nel qual caso *una* delle v, per es. la $v = 0$, può ancora assegnarsi ad arbitrio. Si trasportino infatti, per parallelismo vincolato, le direzioni iniziali della $v = 0$ lungo le $u = \text{cost}^{\text{te}}$, per il che basta una quadratura (Levi-Civita, l. c., § 9). Così ad ogni punto P di Σ viene associata una corrispondente direzione per P, e le linee integrali della corrispondente equazione differenziale del 1.° ordine dànno il secondo sistema richiesto ($v = \text{cost}^{\text{te}}$).

Ed ora cerchiamo quei doppi sistemi (u, v) di una superficie Σ tali che sussista un doppio parallelismo tanto delle direzioni delle $v = \text{cost}^{\text{te}}$ lungo le $u = \text{cost}^{\text{te}}$, quanto delle direzioni delle $u = \text{cost}^{\text{te}}$ lungo le $v = \text{cost}^{\text{te}}$. Sarà perciò necessario e sufficiente che nel ds^2 riferito alle linee (u, v), come linee coordinate, siano nulli insieme i valori dei due simboli $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$:

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\} = 0, \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0.$$

Ma è ben noto (Lezioni § 60) che queste condizioni caratterizzano le *reti di Tchebychef* sulle superficie, colle quali il ds^2 (per una scelta conveniente dei parametri u, v) assume la forma tipica

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega du dv + dv^2,$$

onde vediamo che: *Le reti di Tchebychef* (u, v) *sono tutti e soli i doppi sistemi di linee per le quali le direzioni tangenti alle linee di ciascuno dei due sistemi, lungo una linea qualunque dell'altro, sono parallele nel senso di Levi-Civita; ovvero sono quei sistemi* (u, v) *pei quali le rigate delle tangenti alle* $v = \text{cost}^{\text{te}}$ *lungo le* $u = \text{cost}^{\text{te}}$ *hanno queste ultime per linee di stringimento, e similmente scambiando* (u, v).

Dalla (a), supposto il ds^2 sotto una qualunque forma (1), si deducono facilmente le condizioni affinchè i due sistemi di linee

$$\varphi(u, v) = \text{cost}^{\text{te}}, \quad \psi(u, v) = \text{cost}^{\text{te}}.$$

formino una rete di Tchebychef. Queste condizioni si scrivono sotto la forma invariantiva:

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_{11} \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \varphi_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \varphi_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0 \\ &\psi_{11} \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \psi_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \psi_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0. \end{aligned} \right.$$

Al § 62 delle Lezioni (pag. 159) si è dimostrato, in tutto rigore, il teorema d'esistenza e di unicità delle reti di Tchebychef, quando della rete siano prescritti due fili C, Γ di diverso sistema incrociantisi in un punto M. Questo teorema, colla nozione di parallelismo di Levi-Civita, riceve ora questa spiegazione infinitesimale.

Per parallelismo lungo C, si trasporti il primo elemento lineare MM_1 di Γ_1 e nella curva C_1 luogo di M_1 si avrà la curva C_1 successiva nella rete a C. Indi lungo C_1 si trasporti per parallelismo il secondo elemento lineare M_1M_2 di Γ_1 e la curva C_2 luogo di M_2 darà la successiva a C_1 nella rete, e così via.

Chiudiamo questa breve nota osservando i due corollarii seguenti delle osservazioni generali esposte.

1° *Se per una superficie* Σ *le linee asintotiche* (u, v) *godono della proprietà che le tangenti alle* $v = \text{cost}^{\text{te}}$ *lungo ciascuna* $u = \text{cost}^{\text{te}}$ *formano una rigata avente questa* $u = \text{cost}^{\text{te}}$ *per linea di stringimento,* *la curvatura K della superficie è costante lungo ciascuna $v = \text{cost}^{\text{te}}$, ossia queste asintotiche sono curve a torsione costante e viceversa* [1].

Difatti la proprietà supposta implica la condizione $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$, che equivale alla

$$\frac{\partial \log K}{\partial u} = 0, \quad (K = f(v)).$$

Se la proprietà ha luogo per ambedue i sistemi di asintotiche, la curvatura è una costante assoluta, cioè:

2° *Per le superficie pseudosferiche, e per queste soltanto, le rigate formate dalle tangenti alle asintotiche di ciascuno dei due sistemi, lungo le asintotiche dell'altro, hanno queste ultime per linee di stringimento.*

Pisa, li 30 aprile 1922.

(1) È una classe di superficie ben nota, per le quali si ha una teoria delle trasformazioni (*Lezioni*, Vol. II, 2ª Ediz., §§ 249, s. s.).