UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: G. Andreoli, P. E. Brunelli, E. Ciani, M. Pascal, G. Ricci-Curbastro, G. Sensini, M. Sorrentini, F. Tricomi, G. Vitali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.1, p. 13–20.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_1_13_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1922.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

Topologia. — GIULIO ANDREOLI: *Invarianti topologici ed equivalenza delle superfici.* Geom. Mat. Batt., vol. LIX, 1921.

L'A. riprendendo e sviluppando una sua breve precedente Nota, dimostra come sia possibile costruire topologicamente qualunque superficie priva di singolarità ed a connessione finita operando con sole cinque operazioni elementari di *unione* tra forme topologiche primitive. L'A. segue quindi una via inversa della ordinaria (che consiste nell'eseguire opportuni sistemi di tagli) e perviene alle note condizioni per l'equivalenza topologica di due superficie. L'A. si serve di un numero *carattere* invece del genere per trattare in modo unico superfici monolatere e superfici bilatere. Per queste ultime il carattere è il doppio del genere. Tale considerazione si riattacca ad alcune osservazioni di von DYCK.

Equazioni differenziali. — G. RICCI-CURBASTRO: *Della integrazione dei sistemi di equazioni ai differenziali totali* (Atti del R. Istituto Veneto di S. L. ed A. Anno accademico 1921-22. Tomo LXXXI).

Oggetto di questa Nota è di riconoscere se e come si possa soddisfare ad un sistema di equazioni ai differenziali totali in n variabili, non essendo stabilito quali e quante tra esse devono considerarsi come indipendenti.

Evidentemente perciò si richiede prima di tutto che il sistema stesso considerato come algebrico nei differenziali delle n variabili ammetta soluzioni proprie (cioè con valori non tutti nulli delle incognite) e questa condizione risulta anche sufficiente perchè esistano soluzioni con una sola variabile indipendente.

In generale, se k è la caratteristica della matrice del sistema, perchè il sistema ammetta delle soluzioni con h variabili indipendenti ($h > 1$) è necessario e basta:

1°) che sia $h \leq n - k$;

2°) che il sistema algebrico ammetta h soluzioni proprie indipendenti tali che un certo sistema di equazioni ai differenziali totali, che è da esse definito, risulti completamente integrabile.

Equazioni differenziali. — F. TRICOMI: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto*, in corso di pubblicazione nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei (1).

Nel caso più generale un'equazione lineare alle derivate parziali di secondo ordine, in due variabili indipendenti, non appartiene ad alcuno dei tre tipi tradizionali: *ellittico, iperbolico* e *parabolico*, ma bensì in alcune regioni del piano è di tipo ellittico e in altre di tipo iperbolico. Lo studio di siffatte equazioni è stato finora completamente trascurato. Io ho voluto intraprenderlo con questa Memoria, avendo in mira sovratutto di determinare, con l'ausilio delle equazioni integrali, delle *condizioni al contorno* atte ad individuare una soluzione dell'equazione, nell'intorno della curva attraverso la quale quest'ultima cambia tipo (*curva parabolica*).

A tale scopo mi sono anzitutto occupato di determinare una *forma canonica* cui ogni equazione di tipo misto fosse riducibile con sostituzioni *reali* di variabili. Successivamente, imitando il processo di sviluppo storico p. es. della teoria delle equazioni ellittiche, ho limitato le mie considerazioni all'equazione

$$(E) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

ottenuta uguagliando a zero la parte di secondo ordine della equazione canonica, che è da riguardarsi come il prototipo delle equazioni miste, alla stessa stregua dell'equazione di LAPLACE nel caso delle equazioni ellittiche.

Per l'equazione (E) mi è stato possibile conseguire in modo completo lo scopo cui ho dianzi accennato. Precisamente ho trovato che, sotto certe condizioni che non è qui il caso di specificare, ***esiste una ed una sola soluzione della*** (E) ***assumente valori arbitrariamente prefissati su di una curva qualsiasi collegante due dati***

(1) Una Nota preventiva avente lo stesso titolo di questa Memoria, è stata già pubblicata nei Rend. della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXX (2° sem. 1921).

punti A *e* B *dell'asse* x *(curva parabolica dell'equazione) senza uscir mai dal semipiano* $y > 0$, *e su di un certo tratto di una delle caratteristiche uscente da uno dei due punti dati, p. es. da* A.

Come spesso succede, la cosa più laboriosa è la dimostrazione dell'*esistenza* della soluzione, che io riduco all'inversione di una equazione integrale di seconda specie contenente un integrale di cui si considera il *valor principale* nel senso di CAUCHY, equazione di cui faccio uno studio approfondito.

Equazioni differenziali. — GIULIO ANDREOLI: *Sistemi differenziali ad una variabile generalizzanti l'equazione di Riccati.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXV, 1919.

Idem: *Sulle proprietà di certi sistemi differenziali generalizzanti l'equazione di Riccati.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXV, 1919.

Idem: *Sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie che generalizzano l'equazione di Riccati.* Rend. R. Acc. Scienze Napoli. vol. XXVII, 1921.

Idem: *Sistemi differenziali di Riccati e loro proprietà geometriche.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXVII, 1921.

In questo gruppo di quattro Note l'A. studia certi sistemi differenziali quadratici del primo ordine, indicati dallo SCHLESINGER, quale estensione di quelli di RICCATI. Mostra la loro genesi ottenuta in un doppio modo dai sistemi lineari, mostra l'esistenza di una relazione fondamentale finita fra gl'integrali del sistema (analoga a quella ben nota del rapporto anarmonico per il caso di RICCATI); ricerca le condizioni per l'esistenza di altre relazioni finite; determina l'invarianza della forma del sistema rispetto a certe trasformazioni ed infine accenna alle diverse proprietà geometriche che sono tutte estensioni di quella degl'integrali dell'equazione di RICCATI (in tal caso le tangenti alle curve integrali per lo stesso valore dell'ascissa inviluppano una conica).

Calcolo funzionale. — G. VITALI: *Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali* (R. Acc. dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª, 2° sem., fasc. 12, pag. 498-501).

Si dimostra che *condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di funzioni normali ed ortogonali in* (a, b), $a < b$,

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots, \quad \varphi_n(x), \ldots$$

sia chiuso è che per ogni x *in* (a, b) *si abbia*

$$x - a = \Sigma_i \left[\int_a^x \varphi_i(x) dx \right]^2;$$

e ciò mettendo nella nota equazione di chiusura

$$\int_a^b [f(x)]^2 = \Sigma_i \left[\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \right]^2,$$

$$f(x) = 1 \quad \text{in} \quad (a, x) \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \quad \text{in} \quad (x, b)$$

e usando la nota disuguaglianza di BESSEL.

Si fa un'applicazione del risultato al sistema normale e ortogonale (in 0, 2π)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Geometria algebrica. — E. CIANI: *Intorno ad alcuni covarianti di curve algebriche piane* (Rendic. Istit. Lomb., vol. LIII, 1920). Idem: *Intorno ad alcuni covarianti di superficie cubiche* (Rendic. Istit. Lomb., vol. LIV, 1921).

L'idea fondamentale che mi ha guidato nella redazione della 1ª Nota è la seguente. Data una curva algebrica piana C_n, per un qualunque punto P del suo piano tiriamo le infinite trasversali a incontrare ciascuna la C_n in n punti e sopra ciascuna di esse consideriamo lo stesso covariante binario rispetto al gruppo delle n intersezioni. Se questo covariante binario è di ordine m e di grado p, si vede facilmente che il luogo geometrico di tutti tali covarianti è, a sua volta, un covariante ternario (cioè una curva) di ordine $m + p$ con un punto p^{plo} in P e dipenderà dalla posizione di P (come, ad esempio, dipendono da P gli $n - 1$ covarianti ternarî che costituiscono le $n - 1$ curve polari di P rispetto a C_n). L'esempio più semplice ed espressivo è fornito nella Nota in parola, dal caso speciale in cui C_n sia una cubica e il covariante binario suddetto sia costituito dal gruppo Hessiano rispetto alle tre intersezioni, con C_n, di una trasversale passante per P.

Si perviene così ad una quartica che ha in P un punto doppio. Specializzando le posizioni di P rispetto a C_n, la quartica acquista caratteri speciali (più interessanti del caso generico).

Quanto alla 2ª Nota, essa non è che la immediata estensione (allo spazio) delle considerazioni contenute nella 1ª ed è ottenuta sostituendo alla cubica C_3 una superficie di 3° ordine.

Relatività. — G. Ricci-Curbastro: *Riducibilità delle quadriche differenziali e ds^2 della statica einsteiniana* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Seduta del 5 febbraio 1922).

La riducibilità di una quadrica nei differenziali di n variabili ad un'altra, che ne contenga $n-p$ soltanto è detta ***assoluta*** se i coefficienti della ridotta sono funzioni soltanto di queste ultime variabili, *semplice* nel caso opposto.

Si dimostra in questa Nota:

1°) che per $p=1$, per la riducibilità semplice è, come nell'analogo problema algebrico, necessario e sufficiente che il discriminante della quadrica sia eguale a zero; mentre per la riducibilità assoluta si richiede di più che un certo sistema di equazioni algebriche lineari ed omogenee ammetta soluzioni proprie;

2°) che per $p>1$ non basta che la caratteristica k della matrice della quadrica non superi $n-p$.

Per esempio per $p=2$ perchè una quadrica nei differenziali di n variabili sia riducibile semplicemente ad altra con due differenziali di meno non basta che sia $k \leq n-2$, ma si esige di più e basta che essa sia assolutamente riducibile ad un'altra, che contenga $n-1$ differenziali.

Aeronautica. — M. Pascal: *Forze di pressione su un montante di aeroplano.* Note I, II. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 29, 1920.
Idem: *Forza sostentatrice su un montante di aeroplano.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 27, 1921.

Per calcolare la resistenza che incontra un profilo di ostacolo investito da una corrente fluida piana parallela, uno dei metodi che dà risultati più concordi con le esperienze, è quello basato sul teorema di Joukowski che dà l'espressione della cosiddetta *forza sostentatrice* in funzione della circuitazione delle velocità lungo il contorno dell'ostacolo.

Quando sia assegnata una corrente per la quale sia nota la circuitazione lungo un contorno circolare, il problema si riduce ad una quistione di rappresentazione conforme per trasformare il contorno voluto in un cerchio. Con tale metodo il Kutta, il Tchaplignine, il Joukowski hanno studiato profili che riproducono quello di un'ala di aeroplano.

L'A. studia un contorno che può essere utilizzato come sezione retta di un montante di aeroplano, allo scopo di ridurre le resistenze passive. Calcolando la forza sostentatrice si trova che questa dipende, oltre che dalla posizione dei punti critici di velocità nulla, anche dall'angolo sotto il quale i due rami simmetrici del contorno si incontrano a poppa. Calcolando poi il momento della forza sostentatrice, se ne può determinare il punto di applicazione, cioè il centro teorico di pressione.

Meccanica applicata. — *Sulle velocità critiche degli alberi rapidamente rotanti.* Varie note di P. E. BRUNELLI (Ist. Inc. Napoli, 1919 e 1921; Rend. Acc. Scienze, Napoli, 1918; « Industria » di Milano, 1918 e 1921; « Riv. Mar. », 1919; Coll. Ing. Napoli, 1919; Ass. Naz. Ing. It., 1921; Journal Amer. Soc. New. Eng., 1921; Shipbuilding, 1922) e di M. SORRENTINI (« Monitore Tecnico » di Milano, 1921).

Nel progetto delle macchine moderne termiche, idrauliche o elettriche importa assai conoscere con buona approssimazione, per evitarli, i valori delle velocità critiche, quelle velocità alle quali le forze centrifughe, equilibrano le reazioni elastiche per qualunque valore della freccia; condizione di cose a cui corrispondono inaccettabili disturbi di funzionamento. Sono comunemente noti metodi grafici di soluzione del problema per approssimazioni successive (MORLEY, VIANELLO-STODOLA). Soluzioni generali sono conseguibili solo in casi relativamente semplici; ma sono estremamente interessanti per una discussione del problema intorno al quale è molto difficile e spesso pericoloso estrapolare ad occhio e croce. Una prima serie di soluzioni generali è fornita dal DUNKERLEY in una memoria classica (*Phil. Trans.*, 1894), dopo la quale sembra che le risorse della trattazione generale siano state ritenute esaurite; il caso più complesso trattato è quello di un albero di sezione costante ed uniformemente caricato riposante su tre appoggi; caso che è risolto da un'equazione della forma:

$$\coth z + \coth \lambda z = \cot z + \cot \lambda z,$$

ove z è un numero che ha una relazione semplice col valore della velocità critica, e λ un coefficiente dipendente da caratteristiche geometriche o meccaniche dell'albero. (Di questi coefficienti ne incontreremo in seguito altri che indicheremo con φ, ψ, ecc.). Nelle presenti note è ottenuta la soluzione per una serie di casi più prossimi alle condizioni delle applicazioni. Lo spazio ci consente solo di indicare le forme dell'equazione finale. Per ciascuna di queste equazioni sono fornite tabelle abbastanza estese che danno i risultati numerici nel campo delle applicazioni.

a) Albero su quattro appoggi di sezione costante, uniformemente caricato e simmetrico rispetto alla mezzeria

$$\coth z + \operatorname{tgh} \lambda z = \cot z - \operatorname{tg} \lambda z.$$

(Il confronto di questo caso con quello dell'albero su tre appoggi permette una soluzione sufficientemente approssimata anche del caso generale dell'albero non simmetrico).

b) Albero di due campate ciascuna di sezione costante e uniformemente caricata, ma sezione e carico sono diversi nelle due campate

$$\coth z + \frac{\psi^2}{\varphi} \coth \frac{\lambda}{\varphi} z = \cot z + \frac{\psi^2}{\varphi} \cot \frac{\lambda}{\varphi} z.$$

c) Caso come sopra, ma il carico su di una campata è nullo

$$\coth z - \cot z = kz.$$

d) Albero di tre campate, di diversa sezione e diversamente caricata, ma simmetrica rispetto alla mezzaria

$$\coth z + \frac{\psi^2}{\varphi} \operatorname{tgh} \frac{\lambda}{\varphi} z = \cot z - \frac{\psi^2}{\varphi} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{\varphi} z,$$

(anche questo ammette un caso limite risolta da un'equazione analoga a quella del caso *c*).

e) Albero su due appoggi con un tratto a sbalzo. In corrispondenza dell'appoggio al mezzo variano sezione e carico. (È il caso a cui si possono ravvicinare le condizioni degli alberi portaelica delle navi)

$$\left\{ \cot z - \coth z \right\} \left\{ \operatorname{tgh} \frac{\lambda}{\varphi} z - \operatorname{tg} \frac{\lambda}{\varphi} z \right\} = \frac{2\psi^2}{\varphi} \left\{ 1 + \frac{1}{\cos \frac{\lambda}{\varphi} z \cosh \frac{\lambda}{\varphi} z} \right\}.$$

Nelle condizioni degli alberi d'elica, risolvendo questa equazione si trova che la presenza del tratto a sbalzo fortemente caricato ***abbassa*** la velocità della campata adiacente finanche del 25 $^0/_0$, e ciò spiega la ragione dei gravi perturbamenti nel funzionamento di alcuni apparati. Per le applicazioni pratiche è ricavata una formula empirica che entro certi limiti fornisce risultati molto prossimi a quelli della formula esatta, troppo complessa per entrare nell'uso corrente.

f) Albero appoggiato agli estremi, scarico o assottigliato per un tratto adiacente a un appoggio,

$$\left\{ 1 + \lambda z \cot z \right\} \left\{ 1 + \lambda z \coth z \right\} = kz^3 \left\{ \coth z - \cot z \right\}.$$

E questa equazione dà le misure del lieve rialzamento della velocità critica che corrisponde allo scaricare un breve tratto presso gli appoggi, o del forte abbassamento che si ha invece diminuendo ivi la sezione dell'albero.

g) Albero su due appoggi soggetto a un carico uniforme e ad un carico concentrato nel mezzo

$$z(\mathrm{tg}\, z - \mathrm{tgh}\, z) = \mathrm{cost.}$$

È questo il solo caso di cui finora si sia ottenuta la soluzione in presenza di carichi distribuiti associati a carichi concentrati. I risultati numerici confermano l'attendibilità dei procedimenti approssimati usuali.

Economia. — Guido Sensini: *Le equazioni dell'equilibrio economico-finanziario, per un punto dato, nel caso delle imposte e in un regime di libera concorrenza economica,* pubblicato in « Rivista italiana di Sociologia », Roma, fascicolo ottobre-dicembre 1920.

Le equazioni della statica economica quali ci furono date dal Walras e dal Pareto non tengono conto (alcuno) della presenza dei fenomeni fiscali in un determinato campo economico. (Ciò non suona critica a quegli autori giacchè i problemi vanno risoluti per gradi, incominciando dal più semplice e passando al più complesso). Ora mi par giunto il momento di introdurre nei sistemi d'equazioni dell'equilibrio economico la considerazione dei fenomeni fiscali, e ciò sta formando l'oggetto dei miei studi economico-matematici in questo momento.

Il lavoro sopra indicato è il primo di una serie che non sarà breve. In esso si considera un punto d'equilibrio statico (stabile) e si procura di scrivere le equazioni che individuano tale punto pel caso in cui nel sistema sussista un regime di libera concorrenza completa, sussistano solo imposte dirette ed indirette, i prezzi delle merci siano costanti rispetto alle successive porzioni barattate, i coefficienti di produzione siano anch'essi costanti, il mercato sia chiuso.

Si ottengono così sistemi d'equazioni naturalmente più complessi di quelli Walrasio-paretiani, ma di essi più generali. In seguito bisognerà togliere mano mano le restrizioni imposteci, e quando tale lavoro sarà compiuto possederemo forse le equazioni generali dell'equilibrio economico-finanziario.