UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: P. Fatou, D. Kryjanowski

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.1, p. 21–24.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_1_21_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1922.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

Calcolo funzionale. — P. FATOU: *Sur les équations fonctionnelles.*

È un lavoro di mole considerevole (pagine 279) comparso nei t. XVII e t. XVIII del *Bulletin de la Société mathém. de France* (1919-1920), che reca un contributo notevole ad un Capitolo dell'analisi il quale, nonostante il suo indiscutibile interesse, può dirsi ancora al suo inizio. Il suo titolo *Sur les équations fonctionnelles*, è alquanto generico, ma si tratta in sostanza dello studio dell'iterazione di una funzione analitica, e più specialmente di una funzione razionale di una variabile complessa. Fino a questi ultimi anni, i risultati più notevoli relativamente all'iterazione di una funzione analitica erano quelli ottenuti principalmente dal KŒNIGS — accanto al quale si potrebbe citare il FARKAS e qualche altro — circa al comportamento delle iterate di una funzione analitica $f(z)$ nell'intorno di un punto regolare invariante x, tale cioè da verificare l'equazione $f(x) = x$; lo studio era fatto dunque *in piccolo* o *localmente*, e principalmente nel caso di $|f'(x)| < 1$, in cui x viene detto punto attrattivo; il caso di $|f'(x)| = 1$ veniva poi studiato, in modo però incompleto, dal LEAU. Risultato principale del KŒNIGS era la scoperta di una funzione analitica $\varphi(z)$ regolare nell'intorno di x e verificante la così detta *equazione di Schrœder*:

$$\varphi[f(z)] = kf'(z).$$

Ma lo studio dell'iterazione *in grande*, cioè in tutto il piano sfera della variabile complessa, era un problema quasi nuovo e che presentava gravi difficoltà, anche nei casi più semplici, all'infuori di quello semplicissimo della $f(x)$ lineare: è questo problema che il FATOU affronta nel presente lavoro, e che ha pure formato oggetto di un lavoro notevole di G. JULIA, premiato dall'Accademia delle Scienze di Parigi e di cui renderemo conto in un prossimo fascicolo del nostro Bollettino: l'uno e l'altro trattando il caso dell'iterazione di una funzione razionale.

Data la funzione razionale $R(z)$ di grado $d > 1$, si pone $z_1 = R(z)$, $z_n = R(z_{n-1})$, $z_n = R_n(z)$; le R_n sono le iterate di R, i punti z_n sono i conseguenti di z, e di z si possono considerare gli antecedenti, pei quali si impone l'esame della multiplicità di valori delle $R_{-n}(z)$. Una prima ricerca è quella dei punti invarianti, soluzioni di $R(z) = z$, e quella dei punti invarianti di R_n, soluzioni di $R_n(z) = z$, che porta al concetto di cicli o sistemi di punti periodici per iterazione di R. Ad ogni punto invariante x è connesso il moltiplicatore s, valore di $R'(x)$, e fra questi, relativi ai diversi punti invarianti, passa una relazione semplice, ma fertile di conseguenze. È fondamentale la distinzione dei punti invarianti in *attrattivi, ripulsivi* od *indifferenti*, secondo che è $|s|$ minore, maggiore o uguale ad 1. Lo studio dell'iterazione in vicinanza di un punto attrattivo è quello già stato fatto dal KŒNIGS; l'A. fa un'analisi minuziosa ed accurata del caso difficile del punto indifferente, per il quale non si aveva che l'accennata ricerca non completa del LEAU; esamina prima il caso $s = +1$, poi $s = e^{2\pi i \alpha}$, α essendo razionale; rimane da completarsi lo studio del caso di α irrazionale. Segue l'esame di alcuni casi speciali, fra cui $z^2 + 5$, $z^2 - \frac{5}{4}$ (1) ecc. Ha interesse l'esame dei punti critici di R_{-1} di R_{-n}, e più ancora quello dei domini lasciati invariati da R, a contorno invariante: a proposito dei quali l'A. introduce la nozione, che si rivela importante in questo studio, *di dominio completamente invariante*, intendendo con ciò quello che contiene non solo i conseguenti, ma anche tutti gli antecedenti dei suoi punti. Tutto ciò, insieme a non poche altre osservazioni, è il contenuto dei primi due Capitoli della Memoria.

Nel Cap. III, l'A. studia una classe particolare di sostituzioni razionali: quelle che trasformano in sè rispettivamente l'interno e l'esterno di un dato cerchio, che può anche convenire di trasformare in un semipiano, quello delle parti immaginarie positive: nel quale caso le dette funzioni razionali si possono ridurre alla forma $R(z) = h - \sum_1^d \frac{A}{z-a}$, h e le a essendo reali. Il modo di operare, sul piano, di simili sostituzioni indefinitamente iterate — e anche di quelle che scambiano l'interno del cerchio coll'esterno — viene studiato esaurientemente; rimarrebbe da appro-

(1) Uno studio dell'iterazione di $x^2 - a$, in cui per i valori diversi di a si presentano varie delle particolarità rilevate dall'A., era stato fatto da S. Pincherle (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1 dicembre 1918 e 2 maggio 1920; Rendiconti dell'Accademia di Bologna, 6 aprile 1919).

fondire lo studio dei conseguenti dei punti della circonferenza, che presenta gravi difficoltà di indole aritmetica.

Il Cap. IV, che si propone in ultima analisi di determinare i limiti delle $R_n(x)$, utilizza il concetto di MONTEL sulle famiglie normali di funzioni analitiche: come è noto, esse sono le famiglie dalle quali, estratta comunque una successione di funzioni, questa contiene alla sua volta una successione tendente uniformemente ad una funzione limite. L'A. trova che l'insieme dei punti in cui le R_n costituiscono una famiglia normale è *completamente invariante*: lo è dunque pure l'insieme F dei punti in cui la successione delle R_n non è normale: questo insieme, che contiene almeno un'infinità numerabile di punti, offre in queste ricerche un grande interesse in quanto che esso è, in generale, l'insieme derivato degli antecedenti di un punto generico del piano. Di questo viene dato un gran numero di proprietà, fra cui l'omogeneità di struttura di F in tutte le sue parti, ed il fatto notevole che il numero delle regioni distinte in cui F divide il piano è 1, 2 o ∞. Nei due primi casi, i limiti delle R_n non possono essere che costanti: è ipotetico, del resto, il caso di funzioni limiti non costanti.

Nel Cap. V viene studiata la struttura dei domini di convergenza relativi ai punti invarianti attrattivi o indifferenti: in questo studio si presentano questioni delicate pertinenti all'*analysis situs*, e si ottengono risultati interessanti, come quello che il dominio immediato di un punto invariante attrattivo o è semplicemente connesso, o ha ordine infinito di connessione. Le considerazioni generali sono applicate a varî casi particolari interessanti.

Il Cap. VI è dedicato allo studio delle curve che limitano i dominî invarianti, curve che sono esse stesse invarianti. All'infuori di casi particolari, esse non sono analitiche e non ammettono tangente: come era già stato avvertito in un caso speciale (1), esse presentano un carattere che ricorda quello della nota curva di VON KOCH. Infine il Cap. VII è dedicato allo studio delle soluzioni di equazioni funzionali il cui tipo più semplice è quello delle equazioni di SCHRÖDER e di ABEL. La prima di queste, per l'intorno di un punto invariante attrattivo, è stata risoluta da KŒNIGS; ma l'A. ne approfondisce notevolmente lo studio, sfruttando i risultati ottenuti nei precedenti Capitoli e dimostra come la frontiera del dominio invariante immediato relativo al punto sia, per la funzione, una linea singolare essenziale. Per il caso delle sostituzioni razionali a cerchio fondamentale dimostra che

(1) Nota citata dei Rendiconti dei Lincei, 1 dicembre 1918.

la funzione di KŒNIGS tende all'infinito quando la variabile tende radialmente alla circonferenza frontiera, all'infuori al più di un sistema di raggi di misura angolare nulla. Essa non tende invece necessariamente all'infinito se la variabile tende alla circonferenza seguendo una via non normale alla circonferenza stessa. Più complicato è lo studio per le sostituzioni razionali più generali, come pure quello delle soluzioni dell'equazione di SCHRÖDER nell'intorno di un punto invariante repulsivo, nel quale caso si ha da fare con funzioni non più uniformi ma in cui compie un ufficio importante una funzione $\theta(x)$, inversa della soluzione dell'equazione di SCHRÔDER, intera o meromorfa, scoperta da POINCARÉ, e che soddisfa ad un'equazione funzionale della forma

$$\theta(sx) = R[\theta(x)],$$

come pure quello dell'equazione di ABEL nell'intorno di un punto indifferente. Termina il lavoro lo studio di alcune proprietà di funzioni meromorfe che sono, nel caso di un punto indifferente, le analoghe dell'anzidetta funzione di POINCARÉ per un punto ripulsivo.

Concludendo, riteniamo opportuno di richiamare l'attenzione su un lavoro importante, il quale, sebbene di lettura non facile, e per quanto lasci ancora insolute varie questioni, contiene però un gran numero di risultati di cui dovrà tenere conto chiunque voglia occuparsi dell'attraente ed interessante problema dell'iterazione analitica. *s. p.*

Funzioni. — DEMETRIO KRYJANOWSKI: *Interpretazione geometrica della dipendenza tra due funzioni di due variabili*, Kasan, 1917, (in russo).

Il prof. KRYJANOWSKI dà un'elegante interpretazione geometrica della condizione di dipendenza di due funzioni $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$.

Se $z = f(x, y)$ è una superficie qualunque, egli chiama *isoipse* le proiezioni sul piano xy delle linee di livello $f(x, y) = \text{cost.}$ della superficie; verifica che la condizione necessaria e sufficiente affinchè due funzioni $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ non sieno indipendenti è che i sistemi delle isoipse delle superficie $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ coincidano. L'annullarsi del jacobiano delle due funzioni esprime che le tangenti alle due isoipse passanti per un punto qualunque coincidono, e quindi che le due curve coincidono completamente. L'A. estende poi le sue considerazioni anche al caso in cui le funzioni $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ sono polidrome. *g. v.*