Bollettino Unione Matematica Italiana

Salvatore Pincherle

Recensione di: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, di Ed. Landau (Berlin, J. Springer, 1916).

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.1, p. 25–32.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1922.

RECENSIONI

Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, di ED. LANDAU (Berlin, J. Springer, 1916).

Questo libro, che in poche pagine racchiude una densa ed interessante copia di materia, è già pubblicato da sei anni: ma non è noto fra noi quanto merita, e perciò crediamo di fare cosa utile ai soci dell'U. M. I. dandone qui un ragguaglio alquanto particolareggiato.

L'opera, che non richiede dal lettore nulla più della conoscenza degli elementi della teoria delle funzioni, si propone di dare notizia di un certo numero di proposizioni pertinenti a questa teoria e scoperte in tempo relativamente recente: esse si riferiscono specialmente al comportamento di una serie di potenze sulla sua circonferenza di convergenza ed alla relativa continuazione analitica; molte di queste proposizioni, presentate dapprima con dimostrazioni laboriose, si sono potute in seguito provare con procedimenti più semplici: di questi, non pochi sono dovuti all'Autore, ed ottenuti con acuta analisi che, liberandosi da considerazioni parassitarie, metta in luce il nucleo della questione. La redazione, assai accurata, è condotta in modo da indicare al lettore ogni minimo passaggio di calcolo, pure invogliandolo a consultare le memorie originali: in ogni modo, il libro del LANDAU è ben lungi dall'avere il carattere di compilazione, non solo per le semplificazioni che egli apporta alle dimostrazioni degli altri autori, ma anche perchè a lui sono dovuti alcuni dei più notevoli fra i risultati.

Una opportuna innovazione si riscontra nella Introduzione (pag. 7-16), in cui, di ciascuno dei sette Capitoli di cui è composta l'opera, è data una visione preventiva, indicando per ciascuno l'essenza della questione trattata, lo scopo, i precedenti: agli enunciati dei teoremi è data, in questa introduzione, una forma alquanto più generale che nel testo, ma una generalità più di apparenza che di sostanza.

L'A. è parco di notazioni che non siano dell'uso comune: segnaliamo le scritture:

$$f(x) = O(g(x)), \quad f(x) = o(g(x)),$$

da lui introdotte da tempo, ad indicare che, essendo $f(x)$ funzione complessa e $g(x)$ funzione positiva, è rispettivamente $|f(x)| : g(x)$ limitata ed $f(x) : g(x)$ tendente a zero, per x tendente ad un valore determinato ξ (che può essere anche $+\infty$), e la scrittura $f(x) \backsim g(x)$ per indicare che $f(x) : g(x)$ tende all'unità.

Accenniamo ora brevemente al contenuto dei singoli Capitoli.

CAP. I. **Serie di potenze limitate.** - Indichiamo con E, per brevità, l'insieme di tutte le serie di potenze convergenti nel cerchio $|x| < 1$ ed il cui valore assoluto, entro questo cerchio, non eccede l'unità.

1) Condizione necessaria e sufficiente perchè una $f(x) = \Sigma a_n x^n$ appartenga ad E, è che posto

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu, \quad t_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1},$$

sia, su tutta la circonferenza $|x| = 1$ e qualunque sia n, $|t_n(x)| < 1$. Il numero 1 è limite superiore per le t_n, ed anche massimo, poichè è $t_n(1) = 1$ per l'elemento $f(x) \equiv 1$.

2) Nell'insieme E, per un dato n, le $|s_n|$ hanno per limite superiore il valore dato da

$$G_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \ldots \left(\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\right)^2,$$

proposizione notevole, dovuta al LANDAU, e di cui la dimostrazione (p. 22) si potrebbe forse semplificare; di G_n è dato colla $G_n \backsim \frac{1}{\pi} \log n$, il valore assintotico, con procedimento che coincide con quello già usato in circostanza analoga, dal CESÀRO (*Analisi infinitesimale*, p. 95) (¹).

3) Si può costruire (FÉJER) una $f(x)$ di E per la quale le s_n non sono limitate.

(¹) Conviene notare che la questione delle serie di potenze limitate ha formato oggetto di lavori ulteriori: v. O. SSÀZ, *Math. Zeitschr.*, T. I, p. 163 (1918), dove si trovano anche le indicazioni bibliografiche, e id., ibid., T. 8, p. 302 (1920).

4) Per ogni elemento di E, posto

$$\mathfrak{M}(r) = \sum_{0}^{\infty} | a_n | r^n,$$

si ha $\mathfrak{M}(r) = o\left((1-r)^{-\frac{1}{2}}\right)$ (HARDY); esiste poi un numero positivo e minor d'uno θ tale che è, per tutto E, $\mathfrak{M}(\theta) \leq 1$ (BOHR); vale $\theta = \frac{1}{3}$, ma non alcun numero maggiore di $\frac{1}{3}$.

Conseguenza di questo ultimo teorema è che per $f(x) = \Sigma a_n x^n$, convergente in un cerchio R, si ha

$$\sum_{0}^{\infty} | a_n | \rho^n \leq M(3\rho),$$

per $\rho < \frac{1}{3} R$ ed essendo $M(r)$ il massimo valore assoluto di $f(x)$ sulla circonferenza $|x| = r$. In particolare, per una funzione intera, la disuguaglianza vale qualunque sia ρ.

CAP. II. **Sommabilità d'ordine superiore.** - Data la successione di numeri complessi

$$a_0, \quad a_1, \ldots \quad a_n, \ldots$$

e posto $f(x) = \Sigma a_n x^n$, si formi d'una parte

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = S_n^{(0)}$$
$$S_0^{(0)} + S_1^{(0)} + \ldots + S_n^{(0)} = S_n^{(1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \ldots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)},$$

indi si ponga $c_n^{(k)} = S_n^{(k)} : \binom{n+k}{k}$; si formi d'altra parte

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = h_n^{(0)}$$
$$\frac{1}{n+1}(h_0^{(0)} + h_1^{(0)} + \ldots + h_n^{(0)}) = h_n^{(1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{n+1}(h_0^{(k-1)} + h_1^{(k-1)} + \ldots + h_n^{(k-1)}) = h_n^{(k)}.$$

Se esiste il $\lim\limits_{n=\infty} c_n^{(k)} = s$, si dice, come è noto, che la serie $\sum\limits_0^\infty a_n$ è sommabile d'ordine k nel senso di CESÀRO e che s ne è la somma (o limite) generalizzata secondo CESÀRO di ordine k; se esiste il $\lim_{n=\infty} h_n^{(k)} = s'$, si dice che la serie stessa è sommabile d'ordine k nel senso di HÖLDER e che s' ne è la somma generalizzata secondo HÖLDER di ordine k. L'esistenza del limite di $c_n^{(k)}$ porta a quella del medesimo limite, per $c_n^{(k+r)}$, $r = 1, 2, \ldots$; e così se s' è il limite di $h_n^{(k)}$, è pure il limite di $h_n^{(k+r)}$ per $r = 1, 2, \ldots$; l'esistenza dell'uno o dell'altro porta alla regolarità di $f(x)$ per $|x| < 1$; infine esistendo s, esso è il limite di $f(x)$ quando x tende radialmente ad 1.

Ora, è stato dimostrato da KNOPP e da SCHUR che s ed s' coincidono, cioè che sono identiche le somme generalizzate secondo CESÀRO e secondo HÖLDER; alle dimostrazioni complicate date primitivamente di questa identità, l'A. ne sostituisce una assai semplice ed elegante, dovuta ad I. SCHUR.

Nota poi come si presenti la questione, se la sommabilità d'ordine finito sia condizione necessaria perchè $f(x)$ tenda a limite finito per $x \to 1$, e si risponde negativamente mediante l'esempio, dovuto a LITTLEWOOD, di una serie di potenze convergente per $|x| < 1$ e non sommabile di alcun ordine finito, per la quale è $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$.

CAP. III. Inversione del teorema di Abel sulle serie di potenze.

1) È ben noto il teorema d'ABEL, secondo il quale dalla convergenza di $\sum_0^\infty a_n$, di cui sia l la somma, segue che per x tendente radialmente ad 1, la $f(x) = \sum a_n x^n$ tende ad l. Mentre questo teorema non è generalmente invertibile, come ne dà esempio la $\sum (-1)^n x^n$, è interessante di cercare condizioni sotto cui valga l'invertibilità: si ha in proposito una proposizione data da tempo da TAUBER, dimostrante che se na_n tende a zero ed $f(x)$ tende ad l per x tendente radialmente ad 1, è $\sum_0^\infty a_n = l$.

2) Questo teorema è esteso dall'A. al caso che x tenda ad 1 secondo una successione di punti $x_m = 1 - r_m e^{i\varphi_m}$, con $\lim_{m=\infty} r_m = 0$ e $\cos \varphi_m > \delta > 0$ e da HARDY e LITTLEWOOD al caso che x tenda ad 1 seguendo una linea tangente internamente alla circonferenza $|x| = 1$ e la cui ordinata sia funzione continua e monotona dell'ascissa: sempre nell'ipotesi che na_n tenda a zero.

3) Ma era difficile sostituire quest'ultima condizione con un'altra meno restrittiva: ad esempio quella che na_n rimanga limi-

tata per ogni n. A ciò sono giunti HARDY e LITTLEWOOD con dimostrazione di carattere piuttosto recondito, e collegata con un'altra proposizione degli stessi autori assai notevole in sè stessa, e relativa alle serie di potenze a coefficienti positivi; essa si enuncia come segue: se $f(x) = \Sigma a_n x^n$, con $a_n \geq 0$, converge per $0 < x < 1$ ed è tale che $\lim\limits_{x \to 1} f(x)(1-x) = 1$, si ha che è $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} = 1$.

4) Terminano il Capitolo alcune proposizioni più semplici, nello stesso ordine di idee; ne citeremo due. La prima, dovuta all'A., dice che se na_n tende a zero e $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\varphi})$ tende ad una funzione $g(\varphi)$, uniformemente rispetto a φ, la $\Sigma a_n e^{ni\varphi}$ converge uniformemente ed ha per somma $g(\varphi)$; la seconda, di FÉJER, dimostra che se $\Sigma n |a_n|^2$ converge, la $\Sigma a_n x^n$ converge per tutti i punti x_0 della circonferenza $|x| = 1$ pei quali si verifica che $f(x)$ ha limite se x tende radialmente ad x_0.

CAP. IV. **Sopra alcuni particolari notevoli del comportamento di una serie di potenze sulla propria circonferenza di convergenza.** — In questo Capitolo sono riportati tre esempi notevoli, dovuti rispettivamente ad HARDY, a LUSIN ed a SIERPINSKY. Il primo è quello di una serie di potenze, e precisamente lo sviluppo di $(1-x)^{-i}$ che per $|x| = 1$ converge uniformemente, ma non assolutamente. Nel secondo viene costruita una serie di potenze $\Sigma a_n x^n$, in cui è $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, e che diverge su tutta la circonferenza $|x| = 1$. Nel terzo infine, fondandosi sul precedente, viene data una serie di potenze convergente in un solo punto della circonferenza $|x| = 1$. A questo proposito, l'A. fa osservare come non sia possibile costruire una serie avente sulla circonferenza un aggregato dato di punti di convergenza, poichè l'insieme degli aggregati di punti sulla circonferenza ha potenza superiore a quella del continuo, la quale è la potenza dell'aggregato delle serie di potenze.

CAP. V. **Relazioni fra i coefficienti di una serie di potenze, e le singolarità delle funzioni sulla circonferenza.**

1) Con dimostrazione del LANDAU, viene dato il teorema che se la serie $f(x) = \Sigma a_n x^n$, col raggio 1 di convergenza, ha tutti i coefficienti di argomento compreso fra $\frac{\pi}{2} - \delta$ e $-\frac{\pi}{2} + \delta$, il punto $x = 1$ è singolare per la funzione. Questo teorema fu dato da VIVANTI per il caso dei coefficienti positivi, od anche compresi fra $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$; l'enunciato più generale è di DIENES.

2) Il FATOU ha data una proposizione notevolissima, che qui viene riportata con dimostrazione di M. RIESZ; essa si enuncia: se è $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, la serie $\Sigma a_n x^n$ converge in ogni punto regolare di $|x| = 1$ ed uniformemente su ogni arco di regolarità (arco della circonferenza $|x| = 1$ di cui tutti i punti, estremi inclusi, siano regolari per $f(x)$. Il teorema è notevole in quanto, senza l'ipotesi $a_n \to 0$, la regolarità o meno della funzione non è affatto legata alla convergenza o divergenza della serie, come si vede con esempî elementarissimi.

3) Viene poi dato un teorema di HADAMARD, che risale al 1892, a cui si dà il nome di « teorema della lacuna »: se la serie $f(x) = \Sigma a_{m_n} x^{m_n}$ è tale che il minimo limite di $m_{n+1} : m_n$ è maggiore dell'unità, la circonferenza di convergenza è linea singolare per $f(x)$.

4) Infine, seguendo HURWITZ ed applicando la precedente proposizione di HADAMARD, viene giustificata una notevole asserzione del FATOU, dimostrata per primo dal PÒLYA, che cioè in una qualunque serie di potenze è possibile, ed in infiniti modi, mediante un opportuno mutamento del segno dei coefficienti, di ottenere che la circonferenza di convergenza sia linea singolare.

CAP. VI. Massimo e valore medio del modulo di una funzione analitica su una circonferenza.

1) Una prima proposizione in questo ordine di idee è dovuta ad HADAMARD ed è riportata dall'A., sotto al titolo « Hadamardscher Dreikreisesatz » con dimostrazione lievemente semplificata: se $f(x)$ è regolare per $|x| \leq r_3$, se $M(r)$ è il suo massimo valore assoluto sulla circonferenza $|x| = r$ ($M(r)$ è funzione notoriamente crescente), se infine è $0 < r_1 < r_2 < r_3$, si ha la relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & \log r_1 & \log M(r_1) \\ 1 & \log r_2 & \log M(r_2) \\ 1 & \log r_3 & \log M(r_3) \end{vmatrix} \geq 0,$$

che esprime che $\log M(r)$ è funzione *convessa* di $\log r$. La proposizione vale ancora per una funzione monodroma regolare data nella corona circolare $r_1 \leq |x| \leq r_3$, con r_2 compreso fra r_1 ed r_3.

2) Da tempo HURWITZ (1889) aveva dimostrato che data la serie di potenze $\Sigma a_n x^n$, di cui r sia il raggio di convergenza, l'aggregato delle sue radici di modulo $< r$ coincide coi punti dell'aggregato derivato Q, interni al cerchio r, dell'aggregato delle radici dei polinomî $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = f_n(x)$. (Si calcola come appar-

tenente a Q un numero ξ che sia radice di infinite $f_n(x)$). Di questo teorema l'A. dà due dimostrazioni, indi, giovandosi del citato teorema dei tre cerchi di HADAMARD, dimostra un notevole, recente teorema dovuto a JENTZCH, per il quale ogni punto della circonferenza r appartiene al detto aggregato derivato Q.

3) Chiude il Capitolo la dimostrazione (semplificata dall'A.) di una importante osservazione dovuta ad HARDY; ed è che se $\mu(\rho)$ indica il valore assoluto medio di $f(x) = \Sigma a_n x^n$ per $|x| = \rho$, dove è $\rho < r$, raggio di convergenza della serie, cioè, se è

$$\mu(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

$\mu(\rho)$ ha proprietà analoghe ad M, cioè è funzione crescente, e $\log \mu(r)$ è funzione convessa di $\log \rho$.

CAP. VII. **All'ordine di idee del teorema di Picard** è dedicato l'ultimo Capitolo di questa interessante opera. Un celebre teorema, dato da PICARD nel 1879, insegna che una funzione intera non costante assume per qualche valore finito di x, ogni valore assegnato, ad eccezione di uno al più; una proposizione più generale dello stesso Autore mostra inoltre che una funzione monodroma nell'intorno di un punto x_0 che è per essa singolare isolato, assume in ogni intorno di quel punto qualunque valore assegnato, eccettuato uno al più. Il PICARD ha dimostrato il suo teorema facendo uso delle proprietà della funzione ellittico-modulare, ponendone l'enunciato sotto la forma « una funzione intera che non assume per x finito nè il valore zero, nè il valore 1, si riduce ad una costante ». Più tardi il BOREL è riuscito a darne una dimostrazione fondandosi unicamente su principî elementari della teoria delle funzioni. Ora, seguendo un metodo analogo a quello del BOREL, il LANDAU è giunto, nel 1904, ad una notevole ed inattesa proposizione, dalla quale si deduce subito il teorema di PICARD; ed è che « dati i due numeri complessi α e β diversi da zero, esiste un numero positivo $\omega(\alpha, \beta)$ dipendente soltanto da questi numeri, e tale che ogni funzione

$$f(x) = \alpha + \beta x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

regolare nel cerchio $|x| < \omega$, assume entro questo cerchio almeno uno dei due valori 0 od 1 ». In particolare, per ogni funzione razionale intera

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + a_2 x^2 + \ldots. + a_n x^n,$$

almeno un[illegible] le equazioni $\varphi(x)=0$, $\varphi(x)=1$ ammette una radice minore [illegible] valore assoluto: proposizione notevole che non si [illegible] anco riusciti a dimostrare elementarmente.

1) Alla interessante materia, presentata in un ordine corrispondente più allo sviluppo logico che a quello storico dell'argomento, viene premesso un lemma di CARATHÉODORY, ripetutamente applicato dal LANDAU nei suoi lavori, e che dà un valore maggiorante per $M(r)$: questo lemma è applicato alla dimostrazione del seguente teorema di SCHOTTKY [1]: dato un numero θ positivo minore d'uno ed un numero complesso α, esiste un numero positivo $\omega_1(\theta, \alpha)$, tale che ogni serie $f(x)=\Sigma a_n x^n$, regolare per $|x|\leq 1$ con $f(0)=\alpha$, e che non assume per $|x|\leq 1$ nè il valore zero nè il valore 1, soddisfa per $|x|\leq\theta$ alla disuguaglianza $|f(x)|\leq\omega_1$. Dal quale teorema viene dedotto quello di LANDAU, da questo quello di PICARD, indi l'accennata estensione di questo.

2) L'ultimo paragrafo del Capitolo e del libro contiene tre proposizioni, della prima delle quali diamo l'enunciato: « esiste un numero positivo q tale che ogni funzione

$$f(x)=x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

regolare per $|x|\leq 1$ e che in questo cerchio non assume due volte uno stesso valore, è maggiore di q sulla circonferenza $|x|=1$ », e che culminano nel seguente teorema, dovuto a KOEBE, e che ha ricevuto notevoli applicazioni: « dato il numero positivo θ minore d'uno, esistono due numeri positivi ω' ed ω'', dipendenti solo da θ, e tali che ogni funzione $f(x)$ regolare nel cerchio $|x|<R$ e che non assume per $|x|<R$ due volte uno stesso valore, soddisfa alla disuguaglianza

$$\omega'\leq\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)}\leq\omega''$$

per ogni coppia di punti del cerchio $|x|\leq\theta R$ ».

s. p.

[1] Questa proposizione è stata data dal suo autore, poco tempo dopo la scoperta del teorema di LANDAU ed in relazione col teorema stesso.