Bollettino Unione Matematica Italiana

Pietro Burgatti

Sulle funzioni analitiche d'ordine n

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.1, p. 8–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_1_8_0>

Sulle funzioni analitiche d'ordine n.

Nota di PIETRO BURGATTI

Le funzioni poliarmoniche (in particolare le funzioni biarmoniche) trovano applicazioni importanti nella fisica-matematica. Parecchie loro proprietà sono ora ben note. Furono studiate da vari autori e in vario modo. Meritano speciale menzione i lavori di Mathieu, di Almansi, di Boggio. Nondimeno una sistemazione dei noti risultati nel quadro della fondamentale teoria delle funzioni analitiche (quando ci si limita ai campi a due dimensioni) mi pare assai desiderabile; anche al fine di rendere più facile e fecondo il loro impiego nelle applicazioni. Un tentativo in questo senso fu fatto incidentalmente in un caso particolare da Kolossoff [1]; se da altri poi, non saprei dire.

1. Come è noto, la condizione

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=0$$

è necessaria e sufficiente affinchè $u+iv$ sia funzione (analitica) della variabile complessa $z=x+iy$. Introducendo per comodo il simbolo

$$\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=D_i,$$

[1] Zeitschrift für Math. u. Phys.

la condizione diventa

$$D_i(u+iv)=0. \tag{1}$$

Se $u+iv$ non è funzione analitica, potrebbe esser tale la funzione $D_i(u+iv)$. Affinchè ciò accada, occorre che risulti, in virtù della (1),

$$D_i D_i(u+iv)=D_i^2(u+iv)=0.$$

Più generalmente, potrebbe darsi che fosse analitica la funzione $D_i^{n-1}(u+iv)$. Ciò accadrà quando risulti soddisfatta la condizione

$$D_i^n(u+iv)=0. \tag{2}$$

In questo caso diremo che $u+iv$ è *una funzione analitica d'ordine n*. Le ordinarie funzioni analitiche sono allora d'ordine uno.

Introduciamo anche il simbolo

$$\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}=D_i'$$

coniugato di D_i. Si ha manifestamente

$$D_i D_i'=D_i' D_i=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\Delta,$$

che è l'operatore di Laplace in due dimensioni. Se è soddisfatta la (2), si trae subito

$$D_i'^n D_i^n(u+iv)=\Delta^n(u+iv)=0;$$

da cui

$$\Delta^n u=0,\quad \Delta^n v=0.$$

Le funzioni u e v di x e y sono dunque *poliarmoniche d'ordine n*; dippiù sono *coniugate*. Abbiamo così la nozione di funzioni poliarmoniche coniugate.

2. Posto per convenzione $D_i^0\varphi=\varphi$, si ha la formula evidente

$$D_i^n(\varphi\psi)=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}D_i^s\varphi\cdot D_i^{n-s}\psi.$$

Ora siano φ_s e ψ_r due funzioni analitiche d'ordine s e r rispettivamente. Sarà

$$D_i^m(\varphi_s)=0 \quad \text{per} \quad m=s,\quad s+1,\dots n$$
$$D_i^m\psi(_r)=0 \quad \text{per} \quad m=r,\quad r+1,\dots n$$

talchè, per la formula precedente, risulta

$$D_i^{r+s-1}(\varphi_s\psi_r)=0;$$

la quale esprime che il prodotto $\varphi_s\psi_r$ è una funzione analitica d'ordine $r+s-1$. Ne segue che

$$c_1\varphi_1\psi_n+c_2\varphi_2\psi_{n-1}+\ldots.+c_n\varphi_n\psi_1,$$

dove l'indice di ogni funzione indica il suo ordine di analiticità, è una funzione analitica d'ordine n.

3. Se $f(z)$ è una funzione analitica ordinaria (d'ordine uno), si ha ovviamente

$$D_i'(f(z))=2f'(z).$$

Questa esprime che l'operazione indicata da $\frac{1}{2}D_i'$ equivale alla derivazione rispetto a z. Analogamente; la operazione $\frac{1}{2}D_i$ equivale alla derivazione rispetto alla variabile z_1 coniugata di z.

Ciò posto, sia φ_n una funzione analitica d'ordine n; si avrà

$$D_i^{n-1}(\varphi_n)=f(z),$$

o, per le cose dette,

$$2\frac{\partial}{\partial z_1}[D_i^{n-2}(\varphi_n)]=f(z).$$

Questa dimostra che dev'essere

$$D_i^{n-2}(\varphi_n)=\frac{z_1}{2}f(z)+\psi(z).$$

Così proseguendo, risulta infine

$$\varphi_n=\sum_{n=0}^{n-1}z_1^h\psi_h(z), \tag{4}$$

ove le $\psi_h(z)$ sono tutte funzioni della variabile z.

Resta così determinata *la forma più generale delle funzioni analitiche d'ordine n.*

Potendosi sempre scrivere $z^h\chi_h(z)$ in luogo di $\psi_h(z)$, si ha anche

$$\varphi_n=\sum_{h=0}^{n-1}(x^2+y^2)^h\chi_h(z).$$

Ne segue che

$$U_n = \sum_{h=0}^{n-1} (x^2 + y^2)^h u_h(x, y), \qquad V_n = \sum_{h=0}^{n-1} (x^2 + y^2)^h v_h(x, y),$$

ove

$$u_h + i v_h = \chi_h(z),$$

rappresentano la forma più generale di due funzioni poliarmoniche coniugate d'ordine h.

4. Dalle cose dette risulta che la (4) soddisfa l'equazione

$$\Delta^n \varphi = 0. \tag{5}$$

Naturalmente vi soddisfa anche la coniugata; perciò

$$\varphi = \sum_{h=0}^{n-1} [z_1^h \psi_h(z) + z^h F_h(z_1)]$$

è il suo integral generale.

Sia $\xi = x_1 + iy_1$, $\xi_1 = x_1 - iy_1$. L'inversione

$$z\xi_1 = 1, \quad z_1 \xi = 1 \tag{6}$$

eseguita nell'espressione precedente dà

$$\varphi = \sum_{h=0}^{n-1} \left[\xi^{-h} \psi_h\left(\frac{1}{\xi_1}\right) + \xi_1^{-h} F_h\left(\frac{1}{\xi}\right) \right];$$

ossia, moltiplicando per $\xi^{n-1}\xi_1^{n-1}$, e ponendo $h = n - k - 1$,

$$\xi^{n-1}\xi_1^{n-1}\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} [\xi^k \Phi_k(\xi_1) + \xi_1^k \Psi_k(\xi)];$$

la quale dimostra che $\xi^{n-1}\xi_1^{n-1}\varphi$ soddisfa ancora alla (5).

Ne consegue *che l'inversione* (6) *unitamente al cambiamento di funzione*

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{(\xi\xi_1)^{n-1}} = \frac{\varphi_1}{(x^2 + y^2)^{n-1}},$$

lascia invariata l'equazione $\Delta^n \varphi = 0$.

Il prof. Levi-Civita dimostrò questo teorema per $n = 2$ [1]. Dalla forma generale della funzione φ appare inoltre subito

[1] *Sopra una trasformazione in sè stessa di* $\Delta_2\Delta_2 = 0$. « Atti R. Istituto Veneto », 1897-98.

manifesto che non esistono altre trasformazioni, oltre quella suindicata, che lasciano invariata l'equazione (5).

5. Sia φ_2 una funzione analitica d'ordine 2, regolare entro un'area σ racchiusa dal contorno (s). Si ha per le cose dette

$$D_i^2\varphi_2 = 0, \quad D_i\varphi_2 = f(z), \quad \varphi_2 = \frac{z_1}{2} f(z) + \psi(z).$$

Poichè una $f(z)$ regolare è definita in σ dati che siano i suoi valori al contorno (s), si vede subito che se al contorno sono noti i valori di φ_2 e $D_i\varphi_2$, restano determinate entro σ le funzioni $f(z)$ e $\psi(z)$, e perciò anche la funzione φ_2.

Ripetendo il ragionamento per una φ_n si giunge al seguente risultato: *Una funzione analitica φ_n d'ordine n regolare risulta definita entro un'area σ quando son dati al contorno i valori di φ_n, $D_i\varphi_n$, ... $D_i^{n-1}\varphi_n$.*

Moltiplicando $D_i\varphi_n$ per $\frac{dx}{dv} - i\frac{dy}{dv}$, ove v indica la normale ad (s), si ha

$$\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\right)\left(\frac{dx}{dv} - i\frac{dy}{dv}\right) = \frac{d\varphi_n}{dv} + i\frac{d\varphi_n}{ds}.$$

Il secondo termine è la derivata tangenziale di φ_n lungo (s), la quale è conosciuta, supposto dato il valore di φ_n lungo (s); perciò la conoscenza della derivata normale $\frac{d\varphi_n}{dv}$ porta alla conoscenza di $D_i\varphi_n$. In modo analogo si vede facilmente che la conoscenza della derivata seconda di φ_n lungo la normale conduce alla conoscenza di $D_i^2\varphi_n$; e così via. Talchè il teorema precedente può anche enunciarsi così: *Una funzione regolare analitica d'ordine n risulta definita in un'area σ quando son dati al contorno i valori della funzione e delle sue derivate lungo la normale sino a quella d'ordine $n-1$.*

Come corollario si deducono senz'altro i noti teoremi sulle funzioni poliarmoniche, che definiscono coteste funzioni entro un'area per certe condizioni al contorno.

Altre considerazioni e qualche applicazione formeranno oggetto d'altra Nota.

Bologna, settembre 1922.