Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Fubini

Un teorema di Cech sulle superficie proiettivamente applicabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.2-3, p. 50–51.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_50_0>

Un teorema di Cech sulle superficie proiettivamente applicabili.

Nota di GUIDO FUBINI

Il Dott. CECH ha dimostrato il teorema seguente:

Se due superficie S, S′ sono in corrispondenza biunivoca e se in due punti omologhi O, O′ i piani osculatori a curve omologhe tracciate su S, S′ formano due stelle collineari, ivi le due superficie sono proiettivamente applicabili.

Applicando ad S' una conveniente collineazione, il teorema diventa:

Se due superficie S, $\bar{\mathrm{S}}$ sono in corrispondenza biunivoca e hanno in un punto O, omologo a sè stesso, un contatto analitico del primo ordine, e se in O i piani osculatori a curve omologhe uscenti da O coincidono, allora S ed $\bar{\mathrm{S}}$ hanno in O un contatto del secondo ordine [1].

Ecco una semplicissima dimostrazione di questo teorema. Siano u, v coordinate curvilinee di un punto di S e dell'omologo di $\bar{S}$; siano x, y, z coordinate proiettive non omogenee. Se O è l'origine, le ipotesi del teorema dicono che in O si ha: $x_u = \bar{x}_u$, $x_v = \bar{x}_v$ e analoghe in y, z; e che in più è identicamente $(dx, d^2x, d^2\bar{x}) = 0$, ove con x, y, z e con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ indico le coordinate di un punto di S o di $\bar{S}$, e con $(dx, d^2x, d^2\bar{x})$ indico il determinante, di cui le quantità tra parentesi indicano la prima riga, e le altre righe si deducono sostituendo alla x la y e la z. Posto:

$$D_2x = x_{uu}du^2 + 2x_{uv}dudv + x_{vv}dv^2$$

e analoghe, e quindi $d^2x = x_u d^2u + x_v d^2v + D_2x$ e analoghe, si riconosce annullando i termini in d^2u, d^2v di $(dx, d^2x, d^2\bar{x})$, che dovrà essere identicamente $(x_u, x_v, D_2\bar{x}) = (x_u, x_v, D_2x)$, cioè: $D_2\bar{x} - D_2x = Lx_u + Mx_v$ e analoghe in y, z.

La $(dx, d^2x, d^2\bar{x}) = 0$ si riduce allora alla:

$$(dx, d^2x, Lx_u + Mx_v) = 0$$

ossia

$$(Ldv - Mdu)(x_u, x_v, d^2x) = 0.$$

Escluso dunque il caso che in O le assintotiche sieno indeterminate, dovrà essere $L = 2(\mu du + \nu dv)du$, $M = 2(\mu du + \nu dv)dv$ con ν, μ costanti, ossia: $d^2\bar{x} = d^2x + 2(\mu du + \nu dv)dx$.

[1] Escluso il caso che in O le assintotiche di S, $\bar{S}$ siano indeterminate.

Queste equazioni dimostrano appunto che in O le superficie avranno un contatto del secondo ordine, cioè che le curve dello spazio aventi un contatto tripunto con una curva di S hanno un contatto tripunto anche con la curva omologa di $\bar{S}$. Tali equazioni coincidono infatti con le (III) della mia Mem.; *Applicabilità proiettiva di due superficie* (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1916, tomo 41). La stessa dimostrazione vale in casi più generali, p. es. alle superficie immerse in un iperspazio, e permette di generalizzare il teorema di Cech.

Torino, novembre 1922.