BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

ENRICO BOMPIANI

# Il teorema di Kronecker-Castelnuovo

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **1** (1922), n.2-3, p. 51–52.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_51_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI*

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1922.

## Il teorema di Kronecker-Castelnuovo.

Nota di ENRICO BOMPIANI

**1.** È noto con questo nome il teorema seguente (la cui dimostrazione è dovuta a CASTELNUOVO) (1):

*Una superficie algebrica* F, *di* $S_3$, *irriducibile, la quale dai piani di un sistema* $\infty^2$ *viene segata in curve riducibili, è rigata oppure è la superficie di* STEINER.

La dimostrazione che segue mette in evidenza come giochi in essa l'irriducibilità di $F$ e da quale ipotesi sui sistemi componenti il sistema $\infty^2$ di curve spezzate nascano le rigate: inoltre, utilizzando la nozione d'inviluppo degli $\infty^2$ piani del sistema dato, si evita di far uso del fatto che la sezione piana di una superficie irriducibile, anche se spezzata è connessa (di modo che uno, almeno, dei punti d'intersezione delle parti componenti è punto di contatto del piano con la superficie).

**2.** Sia $F$ una superficie algebrica con $\infty^2$ sezioni piane riducibili: entro il sistema dei loro piani si scelga un sistema $\infty^2$ irriducibile; s'indichi con $\pi$ un piano generico del sistema e con $C \equiv C_1 + C_2 + ....$ la curva di $F$ in esso contenuta.

Conviene distinguere due ipotesi:

1) una (almeno), p. es. $C_1$, delle curve componenti $C$ descrive un sistema $\infty^1$;

2) ogni componente descrive un sistema $\infty^2$.

(1) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili* (Rend. Acc. Lincei, Classe di Scienze, 1894): si trova riportata nella *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* di E. BERTINI (ed. Spoerri, Pisa 1907), pag. 323-326.

Nella prima ipotesi ogni $C_1$ dev'essere in un piano con $\infty^1$ curve $C_2$: se $F$ non è piana, $C_1$ è retta; otteniamo così le rigate, soluzione evidente del problema.

Nella seconda ipotesi (ogni $C_1$ descrive un sistema $\infty^2$, non composto di rette) posson darsi due casi:

$\alpha$) la $C_1$ (generica), situata in $\pi$, non è incontrata dalle $C_2'$ infinitamente vicine a $C_2$ (che pure appartiene a $\pi$);

$\beta$) la $C_1$ è incontrata in uno o più punti dalle $C_2'$ dette.

Nel caso $\alpha$) una generica $\overline{C}_2$ non incontra $C_1$: perchè se ciò accadesse per $\overline{C}_2$ generiche accadrebbe anche per le $C_2'$, contro l'ipotesi in esame: le $\overline{C}_2$ descrivono quindi una superficie algebrica non contenente le $C_1$ e perciò $F$ è spezzata (in due parti almeno).

Nel caso $\beta$) insieme al piano $\pi$ di $C \equiv C_1 + C_2 + ....$ consideriamo un piano $\pi'$, infinitamente vicino, determinato p. es. da una curva $C_2'$ passante per un punto $Q$ preso ad arbitrio su $C_2$ (e infinitamente vicina a $C_2$): questa $C_2'$ incontra $C_1$ (in $\pi$), per ipotesi, in un punto (almeno) infinitamente vicino ad uno dei punti d'intersezione, sia $P_0$, di $C_1$ con $C_2$. La retta d'intersezione di $\pi$ con $\pi'$ ha per posizione limite (quando $C_2'$ tende a $C_2$) la retta $P_0Q$. Poichè $C_2$ non è retta, al variare di $Q$ su $C_2$ questa retta varia (su $\pi$) nel fascio di centro $P_0$: dunque $P_0$ è punto di contatto di $\pi$ col proprio inviluppo, cioè questo coincide con $F$.

D'altra parte, poichè non può ogni piano tangente esser pluritangente ad una superficie (non sviluppabile) su $\pi$ non c'è che un punto $P_0$.

Ciò prova che la $C$ non può avere più di due componenti: se ne esistesse una terza, $C_3$, non potendo questa passare per $P_0$ (altrimenti ogni sezione piana avrebbe in $P_0$ un flesso, cioè $F$ sarebbe un piano) vi sarebbe su $\pi$ almeno un altro punto, distinto da $P_0$, di contatto con $F$.

E prova pure che le $C_2'$ infinitamente vicine a $C_2$ (di $\pi$) incontrano $C_1$ in un sol punto: e poichè questo fatto deve valere anche nel campo finito (altrimenti non varrebbe nell'infinitesimo) due curve $C_1$ e $\overline{C}_2$ non facenti parte di una stessa $C$ (cioè non giacenti in un piano) si tagliano in *un* sol punto.

Segue che $C_1$ e $C_2$ descrivono lo stesso sistema, che ogni piano $\pi$ sega una $C_1$ (che non vi giaccia) in due punti e ogni retta incontra in quattro punti la $F$: le $C_1$ sono quindi coniche e la $F$ è la superficie di STEINER.

*Roma, novembre 1922.*