
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

VITTORIO GORI

Legge di rifrazione nel moto delle acque filtranti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana,
Serie 1, Vol. 1 (1922), n.2-3, p. 57-60.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_57_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Legge di rifrazione nel moto delle acque filtranti.

Nota di VITTORIO GORI

Per definire meccanicamente un ammasso poroso contenente acqua in movimento è sufficiente ⁽¹⁾ far corrispondere in ogni istante ai punti dello spazio occupato dal sistema filtrante la funzione scalare monodroma « carico piezometrico », somma della quota h del punto generico (x, y, z) sopra un piano orizzontale di riferimento con l'altezza che in colonna d'acqua misura la pressione nell'intorno del punto (x, y, z) , altezza eguale alla pressione p divisa per il peso specifico ω dell'acqua.

Ritenendo, come d'altronde la natura fisica del fatto della filtrazione richiede, che la funzione

$$\xi = h + \frac{p}{\omega}$$

sia continua e derivabile, si consideri il vettore

$$i = \text{grad } \xi$$

chiamato « pendenza motrice ».

La portata attraversante una piccola zona di superficie di egual carico piezometrico nell'intorno del punto (x, y, z) , ragguagliata all'unità di area, è proporzionale alla pendenza motrice

(1) PUPPINI, *Sui fondamenti scientifici dell'idraulica*. Bologna.

secondo un coefficiente μ di proporzionalità, scalare e positivo, chiamato « coefficiente di permeabilità ». Ossia è

$$(1) \quad q = \mu \operatorname{grad} \xi$$

con $\mu = f(x, y, z)$ se il mezzo non è omogeneo.

A causa della quasi assoluta incompressibilità del liquido, si ha

$$\operatorname{div} q = 0.$$

Richiamate le predette note proprietà, supponiamo che l'ammasso poroso imbevuto di acqua sia costituito di due parti perfettamente adiacenti con la condizione che il coefficiente di permeabilità subisca discontinuità nel passaggio attraverso la superficie di separazione delle due zone.

Orbene ci proponiamo di dimostrare che le linee di flusso del vettore « portata » e del vettore « pendenza motrice », attraversando la superficie medesima, variano bruscamente di direzione secondo una legge ben determinata.

Si osservi intanto che la discontinuità nella variazione del coefficiente di permeabilità μ , non infirma che la funzione potenziale ξ si mantenga monodroma e continua per ogni punto dello spazio occupato dalla massa filtrante. È piuttosto nei riguardi del campo di esistenza delle derivate di ξ che l'ipotesi di μ discontinuo porta ad escludere al più i punti appartenenti alla superficie di separazione dei due mezzi.

Difatti: si consideri un tubo elementare di flusso del vettore « portata », e si supponga che per un certo tratto esso si svolga nel primo mezzo a coefficiente di permeabilità μ' , poi traversi la superficie di separazione e passi nel secondo mezzo a coefficiente di permeabilità μ'' .

Si indichino con $d\sigma'$ e $d\sigma''$ le aree di due generiche sezioni situate l'una interamente nella regione a coefficiente di permeabilità μ' , l'altra interamente in quella a coefficiente di permeabilità μ'' ; n' e n'' siano i vettori unitari che definiscono le normali rispettivamente alle superficie $d\sigma'$ e $d\sigma''$, dirette verso l'interno della parte di tubo di flusso delimitato dalle due stesse sezioni.

La condizione di solenoidalità di q si traduce in

$$q' \times n' d\sigma' = - q'' \times n'' d\sigma''$$

Se avviciniamo indefinitamente le sezioni $d\sigma'$ e $d\sigma''$, fra loro, al limite si avrà

$$d\sigma' = d\sigma''; \quad n' = -n'' = n$$

quindi:

$$(2) \quad q' \times n = q'' \times n,$$

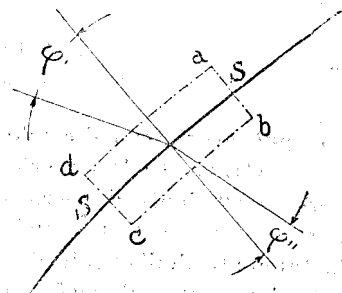
ed in virtù della (1)

$$(3) \quad \text{grad } \xi' \times n = \frac{\mu'}{\mu''} (\text{grad } \xi'' \times n).$$

Le ultime due relazioni permettono di enunciare:

« Attraverso la superficie di separazione di due mezzi porosi, a coefficienti di permeabilità diversi, imbevuti di acqua in movimento, mentre la componente normale del vettore portata si mantiene continua, la componente normale del vettore pendenza motrice subisce una discontinuità ».

D'altra parte, pensiamo sopra la superficie stessa di separazione, un elemento SS così piccolo da potersi ritenere sensibilmente piano. Tracciamo quindi nel piano contenente il vettore « pendenza motrice » (e « portata ») e la rispettiva componente normale, un circuito rettangolare $abcd$ (v. figura) con i lati ad , bc infinitamente vicini e paralleli ad SS ; t sia il vettore unitario che, giacendo nel piano del circuito stesso, definisce la tangente alla superficie SS in un punto generico, orientata positivamente in modo arbitrario.



Volendo calcolare la circuitazione del vettore « pendenza motrice » lungo il circuito $abcd$, fa d'uopo tener presente che la SS è superficie di discontinuità per la componente normale del vettore stesso. Ma poichè abbiamo supposto che i lati $ab = cd$ siano infinitesimi si ha che il contributo da loro apportato nel computo della circuitazione è pure infinitesimo, e perciò:

$$\int_{ad} i' \times t dl - \int_{cb} i'' \times t dl = 0,$$

e per la supposta piccolezza dei lati $ad = cb$, è

$$i' \times t = i'' \times t$$

ossia

$$(4) \quad \text{grad } \xi' \times t = \text{grad } \xi'' \times t$$

e quindi

$$(5) \quad q' \times t = \frac{\mu'}{\mu''} (q'' \times t)$$

possiamo dunque enunciare che:

« Attraverso la superficie di separazione di due mezzi a coefficienti di permeabilità diversi, imbevuti di acqua in movimento, mentre la componente tangenziale del vettore pendenza motrice si mantiene continua, la componente tangenziale del vettore portata subisce una discontinuità ».

Se indichiamo ora con φ' e φ'' gli angoli che il vettore portata (e pendenza motrice) forma con la normale dianzi considerata alla superficie di separazione, rispettivamente nel mezzo a permeabilità μ' ed in quello a permeabilità μ'' , e riuniamo le (5) e (2) ovvero le (4) e (3) si deduce la relazione

$$(6) \quad \frac{\tan \varphi'}{\tan \varphi''} = \frac{\mu'}{\mu''}$$

che può esprimersi dicendo:

« Attraverso la superficie di separazione di due mezzi a diverso coefficiente di permeabilità le linee di flusso del vettore portata e del vettore pendenza motrice subiscono una rifrazione: la tangente dell'angolo di incidenza sta a quella dell'angolo di rifrazione come il coefficiente di permeabilità del primo mezzo sta a quello del secondo ».

Questa legge ricorda la legge di rifrazione ottica; si avverta però che, mentre nel caso della luce ciò che si mantiene costante è il rapporto fra i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione, qui è il rapporto fra le tangenti degli stessi angoli che si mantiene costante.

L'analogia formale si presenta invece perfetta, quando si confronti la (6) con la legge esprimente la rifrazione delle linee di forza (e d'induzione) di un campo elettrostatico in cui la costante dielettrica del mezzo subisca una discontinuità.

Bologna, novembre 1922.