UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: G. Andreoli, P. Burgatti, M. Pascal, G. Ricci-Curbastro, G. Vitali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.2-3, p. 61–68.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1922.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

Astronomia. — P. Burgatti: *Sui satelliti retrogradi.* Rend. Acc. Lincei, 1922.

I satelliti retrogradi, così interessanti per le teorie cosmogoniche, sono studiati teoricamente in queste due Note riguardo ai caratteri che li differenziano dai satelliti a moto diretto. Mostrato come si possa ridurre il problema a quel grado di semplicità che ne consenta uno studio proficuo, si prendono in considerazione particolarmente le orbite quasi circolari. Si trova quindi l'esistenza di due gruppi di orbite retrograde, separati da un'orbita detta *singolare*. Uno di questi ha, rispetto al pianeta, un carattere che si potrebbe dire *iperbolico*; onde si potrebbe ritenere come probabile che un satellite che percorre una di quelle orbite avesse origine extra planetaria. La questione viene esaminata considerando i satelliti di Giove e di Saturno. Si dimostra che i satelliti retrogradi di questi pianeti sono interni all'orbita singolare; e, prendendo in considerazione i raggi della sfera d'azione di quei pianeti, si fa vedere la poca probabilità dell'esistenza effettiva di satelliti retrogradi a carattere iperbolico: che potrebbero, secondo certe teorie, essere state catturate.

— — P. Burgatti: *Dell'azione delle stelle sui perielii dei pianeti e delle comete.* Mem. Acc. Scienze di Bologna, 1922.

In questa Nota viene esaminata l'azione globale esercitata dalle stelle sul moto dei corpi appartenenti al sistema solare, e si dimostra che produce uno spostamento dei perielii insensibile alle nostre osservazioni. Questo poteva ritenersi quasi intuitivo pei pianeti, ma non del tutto per le comete a grande periodo. Per dimostrarlo si è resa necessaria una estensione ad orbite di qualunque eccentricità d'una notissima formula da Newton per l'angolo aspidale relativamente alle orbite quasi circolari.

La formula è, applicata alle comete:

$$\varphi = \pi + \pi \frac{a^3}{R^3}(e^2 - 3\sqrt{1-e^2}),$$

dove e è l'eccentricità, R la massima distanza a cui potrebbe giungere una cometa avente orbita esattamente parabolica al perielio (calcolata già dal prof. ARMELLINI), a la media delle distanze dal perielio e dell'apelio.

Algebra. — G. RICCI-CURBASTRO: *Un teorema sulle sostituzioni lineari.* (Atti della Reale Accademia di Scienze Lettere ed Arti di Padova).

Il teorema di cui si tratta è il seguente:

« Ogni sostituzione lineare ed omogenea è il prodotto di tre sostituzioni, delle quali la prima e l'ultima sono ortogonali, mentre la mediana è moltiplicativa ed a coefficienti positivi ».

Determinanti. — GIULIO ANDREOLI: *Su alcuni determinanti affini ai circolanti.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXVIII, 1922.

Idem: *Sovra altre classi di determinanti affini in circolanti.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXVIII, 1922.

Idem: *Sovra una più estesa classe di determinanti che si decompongono in fattori razionali.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXVIII, 1922.

L'A. partendo dai determinanti che si ottengono dalle equazioni differenziali trovate nei lavori riassunti più avanti (pagine 25-26) nel caso dei coefficienti costanti, perviene al teorema generale che il determinante della matrice:

$$\| A_0 \| + \| A_1 \| + \dots + \| A_{r-1} \|$$

(ove la matrice $\| A_\rho \|$ sia circolante di ordine n ed inoltre il numero q_ρ sia eguale a $q_0{}^\rho$ ed anche $q_0{}^r \equiv 1 \bmod n$) si decompone in fattori razionali negli elementi delle singole matrici.

La formazione ed il grado di tali fattori è in stretta relazione con lo spezzamento del sistema differenziale ora indicato.

Funzioni analitiche. — GIULIO ANDREOLI: *Alcuni corollari del teorema di Picard.* « Giorn. Matem. Batt. », vol. LVIII, 1920.

L'A. dimostra che se una funzione olomorfa f non assume il valore o, lo assumeranno tutte le espressioni formate linearmente con potenze qualunque della f stessa; e che tali espressioni assumono qualunque valore assegnato.

Funzioni analitiche. — M. PASCAL: *Gli integrali n-pli nel campo complesso.* Rend. R. Acc. di Napoli, (3), v. 26, 1920.
Idem: *Sull' integrale multiplo di una forma differenziale.* Rend. R. Acc. di Napoli, (3), v. 26, 1920.

La considerazione dell' integrazione multipla nel campo complesso e della corrispondente estensione dei teoremi di CAUCHY e di MORERA, era stata fatta nel caso di $n=2$ e con metodi differenti dal POINCARÉ, dal VOLTERRA e dal prof. E. PASCAL: quest' ultimo soltanto vi era giunto con metodo diretto definendo l' integrale doppio nel campo complesso allo stesso modo che se le funzioni e le variabili fossero reali.

Seguendo lo stesso metodo, data una $Z = X_1 + iY_1$ funzione delle n variabili complesse $z_v = x_v + iy_v$ $(v = 1, 2, \ldots, n)$, e supponendo inoltre che le $2n$ variabili reali x_v, y_v siano ciascuna funzione delle n variabili reali $t_1, \ldots, t_n$, l' A. nella prima Nota definisce per integrale n-plo di z, l' integrale

$$\int\int \ldots \int z \frac{\partial(z_1 \ldots z_n)}{\partial(t_2 \ldots t_n)} dt_1 \ldots dt_n$$

e dimostra che *condizione necessaria e sufficiente perchè tale integrale sia indipendente dalla varietà a* n *dimensioni (cammino d' integrazione), ma dipenda soltanto dalla varietà a* n $-$ 1 *dimensioni limite della precedente, è che* Z *sia monogena delle* $z_1 \ldots z_n$.

Per introdurre il concetto d' integrale doppio nel campo complesso il POINCARÉ ha posto a base delle sue considerazioni un teorema di calcolo reale che dà la condizione necessaria e sufficiente perchè un integrale di superficie dipenda solo dalla curva contorno. Nella seconda Nota l' A. fa due successive estensioni di tale teorema.

Dette $A_1, \ldots, A_{n+1}$, $n+1$ funzioni delle $n+1$ variabili $x_1 \ldots x_{n+1}$, si definisce l' integrale n-plo

$$\int\int \ldots \int [A_1 dx_2 \ldots dx_{n+1} + A_2 dx_1 dx_3 \ldots dx_{n+1} + \ldots + A_{n+1} dx_1 \ldots dx_n]$$

ponendo le x_i a loro volta funzioni delle n variabili $t_1 \ldots t_n$. Si trova che la *condizione necessaria e sufficiente perchè l' integrale* n-*plo del tipo considerato sia indipendente dalla varietà a* n *dimensioni (immersa nello spazio a* n + 1 *dimensioni) che si considera come cammino d' integrazione, ma dipenda soltanto dalla varietà contorno a* n $-$ 1 *dimensioni è che sia*

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_{n+1}}{\partial x_{n+1}} = 0.$$

Viene naturale allora di considerare l'espressione

$$\iint \cdots \int \sum_{i_1 \dots i_n = 0}^{m} A_{i_1 \dots i_n} dx_{i_1} \dots dx_{i_n}$$

in cui le m variabili $x_i (m > n + 1)$ sono funzioni delle n variabili $t_1 \dots t_n$ e le A sono funzioni regolari di tutte le x_i, ma sono tali che scambiando fra loro due indici consecutivi esse cambiano di segno, e sono nulle se due indici hanno lo stesso valore.

Si trovano allora $\binom{m}{n+1}$ condizioni del tipo

$$\frac{\partial A_{i_2 \dots i_{n+1}}}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial A_{i_1 i_3 \dots i_{n+1}}}{\partial x_{i_2}} + \dots + (-1)^n \frac{\partial A_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_{i_{n+1}}} = 0$$

necessarie e sufficienti perchè l'integrale del tipo considerato sia indipendente dalla varietà a n *dimensioni immersa nello spazio a* m *dimensioni, ma dipenda solo dalla varietà contorno.*

In base a tali risultati si ritrova subito l'estensione del teorema di CAUCHY-MORERA già trovata direttamente.

Soltanto ora che si cominciano a riprendere gli scambi Internazionali, ho trovato che il sig. J. LENZE nella sua Nota: *Ueber die Integration eines p-faches Differentialausdruckes von n unabhängigen Veränderlichen* (Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 30, 1920) ha trattato lo stesso problema con metodi diversi ma giungendo a risultati analoghi.

Calcolo funzionale. — GIULIO ANDREOLI: *Sull'iterazione di una speciale funzione.* Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXVIII, 1919.

L'A. mostra con un semplicissimo esempio come variano i gruppi dei punti *antecedenti* e *susseguenti* di un dato punto, allorchè varia un parametro contenuto nella funzione che si itera.

L'esempio è scelto in modo che susseguenti di antecedenti (e recipr.) siano alla lor volta direttamente antecedenti o susseguenti del dato: ciò che permette di semplificare la trattazione.

— — GIULIO ANDREOLI: *Sulla derivazione applicata iteratamente alle funzioni analitiche.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXV, 1919.
Idem: *Sull'iterazione di operatori differenziali.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXV, 1919.

L'A. riprende ed estende una questione del VITALI. Ricerca cioè e trova quali siano le funzioni per cui la derivata n^{ma} tenda a più valori limiti, per $n \to \infty$, percorrendo successioni prestabilite. Estende ancora tale ricerca all'iterazione di operatori differenziali.

Calcolo funzionale. — GIULIO ANDREOLI: *Un teorema su certe equazioni funzionali e sua interpretazione meccanica.* Rend. R. Acc. Linc., vol. XXVIII, 1919.

Idem: *Su alcune disequazioni funzionali e gli sviluppi in serie che se ne deducono.* Rend. R. Acc. Linc., vol. XXIX, 1920.

Idem: *Su i nuclei risolventi di certe equazioni integrali singolari.* Rend. Acc. Sc. Napoli, vol. XXVII, 1921.

Nelle due prime brevi Note è dimostrata l'impossibilità di trovare delle funzioni f, soddisfacenti all'equazione:

$$\sum_1^\infty f_i(x - \alpha_i t) = 0,$$

se le funzioni f hanno tutte modulo massimo inferiore ad una quantità fissata, se la serie converge uniformemente e se le α sono tutte diverse fra loro. Ne segue che se una funzione $G(x, t)$ è rappresentabile con una serie del tipo ora indicato, lo sviluppo è unico.

Fra le diverse conseguenze di questo teorema è contenuto il risultato esposto nella terza Nota nella quale l'A. dimostra che una certa classe di equazioni integrali singolari è la *sola* (fra quelle di un certo tipo già da lui studiato) risolubile per derivazione.

Equazioni differenziali. — GIULIO ANDREOLI: *Sui sistemi di equazioni differenziali lineari di cui il determinante dei coefficienti sia un circolante.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, vol. XXVII, 1921.

L'A. pone in evidenza come il fatto che i coefficienti formino un circolante d'ordine n, determini uno spezzamento del sistema dato in sistema d'ordine inferiore. Precisamente gli ordini dei diversi sistemi parziali così ottenuti, sono legati ad un carattere aritmetico del circolante stesso: sono cioè legati al numero q (primo con n) tale che la 2^a, 3^a,... linea del circolante si ottengono dalla 1^a mediante potenze q^{esime}, $2q^{esime}$ ecc. della sostituzione circolare $(a_1 a_2 .... a_n)$.

Geometria differenziale. — G. VITALI: *Sopra alcune operazioni di calcolo assoluto.* (R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett., vol. LV. Adunanza 9 maggio 1922.

Partendo dalla estensione delle nozioni di derivata covariante e controvariante ai sistemi misti fatta dal PALATINI [1] si dimostrano per queste derivate le regole del calcolo differenziale ordinario.

Fissato poi un sistema di differenziali delle variabili e indicato con

$$X^{s_1, s_2, \ldots s_\mu}_{r_1, r_2, \ldots r_m}$$

un sistema misto covariante d'ordine m e controvariante d'ordine μ si pone

$$\delta_t X^{s_1, s_2, \ldots s_\mu}_{r_1, r_2, \ldots r_m} = \sum_1^n {}_{p_i} D_{p_1, p_2, \ldots p_t} X^{s_1, s_2, \ldots s_\mu}_{r_1, r_2, \ldots r_m} dx_{p_1}, dx_{p_2}, dx_{p_t}$$

dove $D_{p_1, p_2, \ldots p_t}$ è simbolo di derivazione multipla covariante.

Questo è un sistema misto covariante d'ordine m e controvariante d'ordine μ a cui si dà il nome di *differenziale di* FUBINI. Si pone poi $\delta_1 = \delta$, e con δ^t si indica l'operazione δ ripetuta t volte, δ^t è chiamato *differenziale di* LEVI-CIVITA.

Per questi differenziali si dimostra che se

$$Z^{s_1, s_2, \ldots s_\mu, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k}_{r_1, r_2, \ldots r_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h} =$$

$$= \sum_1^n {}_{\lambda_i, \rho_i} X^{\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\sigma, s_1, s_2, \ldots s_\mu}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu, r_1, r_2, \ldots r_m} \cdot Y^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k}_{\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h}$$

si ha

$$\delta^t Z = \sum_1^n {}_{\lambda_i, \rho_i} \sum_1^t {}_h \binom{t}{h} \delta^h X \cdot \delta^{t-h} Y$$

$$\delta_t Z = \sum_1^n {}_{\lambda_i, \rho_i} \sum_1^t {}_h \binom{t}{h} \delta_h X \cdot \delta_{t-h} Y$$

dove per brevità sono sottintesi gli indici.

[1] A. PALATINI, *Sui fondamenti del calcolo assoluto.* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. XLIII, pagg. 192-202).

Meccanica. — P. Burgatti: *Sopra una particolare soluzione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici.* Rend. Acc. Bologna, 1921.

In questa Nota è posto in evidenza un particolare integrale dell'equazioni dell'equilibrio elastico, che sintetizza, in forma semplice ed espressiva, le formule di risoluzione di parecchi problemi noti, ma interessanti per la loro semplicità e pratica applicazione. Tali sono: quello del corpo appoggiato sotto l'azione della gravità e di certe pressioni; quello della deformazione d'una piastra soggetta sulle due faccie a diverse temperatura costante; quello della deformazione del cilindro immerso in un liquido di data densità e sollecitato dal peso; ecc.

Meccanica razionale. — Giulio Andreoli: *Sul moto di un punto abbandonato nell'interno di un cilindro circolare retto.* Rend. Circ. Matem., Palermo, 1920.

L'A. considera il moto di un punto, non soggetto a forze, che urti elasticamente sulla parete e sulle basi del cilindro circolare retto. Caratterizza le condizioni affinchè la traiettoria sia densa in volume (riempie allora una corona cilindrica); quelle per cui sia densa in superficie (ricopre o delle porzioni di iperboloidi rigati di rotazione, oppure dei prismi aventi per Sezioni normali dell'asse dei poligoni regolari); e quelle infine per cui la traiettoria sia periodica.

Idrodinamica. — M. Pascal: *Circuitazione superficiale. 1° Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 29, 1920.

Idem: *Circuitazione superficiale. 2° Sua espressione vettoriale e teoremi analoghi a quelli sull'ordinaria circuitazione.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 30, 1921.

Idem: *Circuitazione superficiale. 3° Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 30, 1921.

Idem: *Circuitazione superficiale.* Giorn. di Mat. di Battaglini, v. 59, 1921.

È noto che cosa è e come si definisce il *numero* circuitazione di un vettore lungo una linea chiusa. L'A. definisce un vettore $C = \int_\sigma V \wedge n d\sigma$, che per analogia chiama *circuitazione di un vettore* V *lungo una sup... chiusa* σ, *o circuitazione superficiale*.

Adoperando poi indifferentemente metodi cartesiani e metodi vettoriali, dimostra che per la circuitazione superficiale valgono teoremi affatto analoghi a quelli per la circuitazione ordinaria. Interpretando il vettore *V* come quello della velocità di una corrente fluida tridimensionale si hanno così i teoremi: *Se la circuitazione superficiale è nulla qualunque sia la superficie lungo la quale è calcolata, le velocità del fluido dipendono da una funzione potenziale uniforme; e reciprocamente.*

Se esiste potenziale di moto (polidromo), la circuitazione superficiale è indipendente dalla superficie lungo la quale è calcolata.

Ed infine un teorema che può essere considerato come l'analogo del teorema di STOKES: *La circuitazione lungo una superficie chiusa* σ *è uguale al doppio della somma delle velocità istantanee di rotazione delle particelle fluide contenute entro* σ, *moltiplicate per l'elemento del volume che ha* σ *per contorno.*

Nella Memoria di cui le tre Note precedenti sono un breve sunto, l'A. mostra come si può in un caso particolare, calcolare abbastanza facilmente le componenti del vettore circuitazione superficiale.

I concetti svolti trovano poi la loro applicazione nella dimostrazione del seguente teorema, che è da ritenersi come l'estensione del teorema della forza sostentatrice al caso di una corrente fluida tridimensionale:

Se una corrente fluida tridimensionale di velocità limite V_0, *diretta nel senso negativo dell'asse* x, *investe un ostacolo, la risultante delle pressioni del fluido sulla superficie dell'ostacolo è parallela al piano* yz. *I valori delle sue componenti secondo gli assi* y *e* z *sono rispettivamente uguali al prodotto della densità del fluido e della velocità limite della corrente per le componenti secondo gli assi* z *e* y *del vettore della circuitazione superficiale calcolata lungo una superficie infinitamente prossima alla superficie dell'ostacolo.*