

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UMI

## Sunti di lavori esteri

\* Lavori di: A. Angelesco, E. Bompiani, E. Borel, A. Cahen, T. Carleman, B. Cartan, A. Denjoy, J. Drach, I. Fredholm, J. Fuhrich, B. Gambier, M. Gevrey, G. Giraud, E. Goursat, C. Guichard, M. Janet, G. Julia, R. Lagrange, M. Leoat, P. Lévy, G. Mittag-Leffler, J. Möll, P. Montel, L. Monville, A. M. Nörlund, K. Popoff, M. Prevost, G. J. Remondos, I. L. Roux, S. Sarantopoulos, M. Stoilow, F. Tank, G. Valiron, Th. Varopoulos, H. Villat, W. Wilkosz, I. Wolff

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana,*  
*Serie 1, Vol. 1 (1922), n.2-3, p. 69-84.*

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1922\\_1\\_1\\_2-3\\_69\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_69_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1922.

## SUNTI DI LAVORI ESTERI

**Funzioni analitiche.** — P. MONTEL. (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Paris, T. 174, pag. 22 e pag. 143).

Nella prima nota considerà una famiglia di *funzioni olomorfe* in una regione ( $D$ ) e chiama questa famiglia *quasi-normale* in questo campo, se da tutte le successioni infinite di funzioni di questa famiglia si può estrarre una successione convergente uniformemente, nell'interno di ( $D$ ), ad una funzione o ad una costante anche infinita, ad eccezione di un numero limitato di punti. Se il numero di questi punti irregolari è minore od uguale a  $p$  la famiglia dicesi *quasi-normale d'ordine*  $p$ .

Enuncia poi dei teoremi relativi a questa famiglia e come applicazione generalizza un noto teorema di SCHOTTKY <sup>(1)</sup>, cioè enuncia il teorema:

« Le funzioni regolari in un cerchio  $D$ , ove esse non prendono più di  $p$  volte nè il valore zero nè il valore uno e per le quali i  $p+1$  primi coefficienti del loro sviluppo in serie sono fissi, hanno il loro modulo limitato da un numero  $\Omega$  entro un cerchio concentrico interno a  $D$  ». Per  $p=0$  si ha il teorema di SCHOTTKY.

Nella seconda nota dà un teorema generale relativo a queste funzioni (generalizzazione d'un teorema di LANDAU), e come caso particolare enuncia la proposizione:

« Data una funzione olomorfa attorno all'origine  $x=0$ ,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{p+1}x^{p+1} + \dots,$$

ove  $a_{p+1} \neq 0$ , esiste un numero  $R$  non dipendente che da  $a_0, a_1, \dots, a_{p+1}$ , tale che in tutti i cerchi di raggio superiore ad  $R$  o la funzione  $f(x)$  cessa di essere olomorfa, o questa funzione prende nel cerchio più di  $p$  volte almeno i valori zero ed uno ».

(1) SCHOTTKY, *Sitzungsber*, Berlin, 1904.

**Funzioni analitiche.** — TH. VAROPOULOS (*Ibid.*, T. 174, pag. 272) estende il teorema della seconda nota alle funzioni multiforme nelle vicinanze dell'origine. g. b.

**Funzioni di variabile complessa.** — I. WOLFF. *Sulle serie*  $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - z_n}$ . (*Ibid.*, T. 173, pag. 1056 e pag. 1327).

Nella prima nota mostra che una serie  $\sum \frac{A_n}{x - z_n}$ , tale che  $\sum |A_n|$  sia convergente, può essere prolungata analiticamente nelle regioni ove si trovano le  $z_n$ .

Nella seconda nota dà un esempio più generale che mostra la grande generalità di queste serie e dimostra che tutte le funzioni, regolari in una regione  $D$ , sono, in tutte le regioni  $D_1$  contenute con il loro contorno in  $D$ , rappresentabili mediante una serie della forma  $\sum \frac{A_n}{x - z_n}$ , le  $z_n$  essendo in  $D$ , ed ove  $\sum |A_n|$  è convergente.

— — E. BOREL (*Ibid.*, T. 173, pag. 1057) mette in evidenza le conseguenze della prima nota di WOLFF dal punto di vista delle funzioni di variabile complessa e dal punto di vista degli insiemi di misura nulla.

— — A. DENJOY (*Ibid.*, T. 174, pag. 95) precisa i risultati della seconda nota di WOLFF, e mostra che se  $f(x)$  è una funzione regolare all'interno e sul contorno  $c'$  contenente  $c$ , si può scegliere indipendentemente da  $f(x)$  dei punti  $z_n$  aventi per insieme derivato

la riunione di  $c$  e  $c'$  ed in maniera che: se  $|A_n| < e^{-n^{\frac{1}{2}} - \epsilon_n}$  ( $\lim_{n=\infty} \epsilon_n = 0$ ),

la serie  $\sum \frac{A_n}{x - z_n}$  e tutte le sue derivate convergono assolutamente ed uniformemente da una parte verso  $f(x)$  e le sue derivate su  $c$  ed all'interno di  $c$ , e d'altra parte verso o fuori di  $c'$  e su  $c'$ .

— — T. CARLEMAN (*Ibid.*, T. 174, pag. 558) dimostra che la condizione  $|A_n| < e^{-(\alpha + \epsilon)n \log n}$  ( $\alpha > 1$  ed  $\epsilon$  positivo arbitrario) è sufficiente perchè i poli apparenti della serie  $\sum \frac{A_n}{x - z_n}$  siano poli per la funzione rappresentata da questa serie.

— — G. JULIA (*Ibid.*, T. 174, p. 370) studia le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x - z_n}$  in rapporto all'integrazione e fa vedere che opportunamente scelto

l'aggregato dei  $\alpha_n$  ed i cammini d'integrazione, si deducono delle conseguenze in contraddizione col teorema di POINCARÉ-VOLTERRA, ciò, perchè mediante l'integrazione di tale serie si ottengono delle funzioni multiformi monogene ma non analitiche, per le quali l'insieme dei valori può avere la potenza del continuo.

g. b.

**Funzioni analitiche.** — G. MITTAG-LEFFLER. (*Ibid.*, T. 174, pag. 790).

Indica una serie di enunciati più o meno restrittivi che si possono dare al teorema fondamentale di CAUCHY sulle funzioni monogene; uno di questi enunciati già proposto <sup>(1)</sup> dall'autore esige che una certa espressione formata mediante tre valori infinitamente vicini della funzione tenda verso zero uniformemente.

— — E. GOURSAT (*C. R. T.* 174, pag. 896) osserva che la condizione che egli ha data <sup>(2)</sup> suppone unicamente l'esistenza della derivata e non esige alcuna ipotesi d'uniformità.

g. b.

— — G. VALIRON. (*Ibid.*, T. 174, pag. 1054).

Continua una sua nota precedente <sup>(3)</sup> ove ha mostrato come se  $f(z)$  è una funzione d'ordine  $\rho$  la serie

$$\sum_0^{\infty} R_n^{-\rho} \quad \text{e} \quad \int_a^{\infty} \frac{\log M(z)}{z^{1+\rho}} dz,$$

essendo  $R_n$  il modulo dell'ennesimo zero di  $f(z)$ , convergono e divergono insieme, dimostrando che se  $\sum_0^{\infty} R_n^{-\rho}$  è divergente è anche divergente  $\sum r_n^{-\rho}$  ad eccezione può essere di un solo valore  $x$  essendo  $r_n$  il modulo dell'ennesimo zero di  $f(z) - x$ .

g. b.

— — A. M. NÖRLUND. (*Ibid.*, T. 174, pag. 919 e pag. 1108).

Studia nella prima nota, la serie di STIRLING-LAGRANGE

$$F(z) = F(0) + \sum_{s=0}^{s=\infty} z^s (z^2 - 1)(z^2 - 2^2) \dots (z^2 - s^2)(a_s + b_s z),$$

<sup>(1)</sup> G. MITTAG-LEFFLER, (*C. R. T.* 173, 1921, pag. 1041).

<sup>(2)</sup> E. GOURSAT, (*Acta mathematica*, t. IV, 1884, pag. 194 et *Transactions of the American Society*, 1900).

<sup>(3)</sup> VALIRON, *C. R. T.* 172, pag. 1226, *Bullettin Sciences Math.*, 1921, p. 248.

$a$ , e  $b$ , si calcolano facilmente dai valori della  $F(x)$  nei punti  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e dimostra che se essa converge nelle vicinanze di un punto qualunque essa convergerà in tutte le ragioni finite del piano <sup>(1)</sup>.

Nella seconda nota studia la serie

$$\sum_{s=0}^{\infty} as'(z - \omega)(z - \omega) \dots (zs - \omega)$$

che converge in casi molto più estesi di quella di STIRLING.

*g. b.*

**Funzioni di variabile reale.** — A. ANGELESCO. (*Ibid.*, T. 174, pag. 273).

Mostra che se una funzione  $f(x)$  continua nell'intervallo  $(a, b)$  soddisfa alle  $n$  condizioni

$$\int_a^b k(x)x^{\mu_i} f(x) dx = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

con  $0 < a < b$ ,  $k(x) > 0$ , per  $x$  compreso nell'intervallo  $(a, b)$ ,  $\mu_i$  numeri reali e differenti, l'equazione  $f(x) = 0$  ha almeno  $n$  radici reali e distinte nell'intervallo  $(a, b)$ . L'Autore applica questo risultato all'equazioni integrali di prima specie, alle funzioni biortogonali, ai polinomi di LAGUERRE.

*g. b.*

**Funzioni in senso generale.** — M. GEVREY. (*Ibid.*, T. 174, pagina 368).

Mostra che, anteriormente <sup>(2)</sup> alle ricerche recenti di A. DENJOY <sup>(3)</sup> e di E. BOREL <sup>(4)</sup> sulle proprietà delle funzioni quasi analitiche di variabile reale, per le quali la serie di TAYLOR diverge in tutti i punti del loro campo, benchè siano determinate dalla conoscenza delle derivate successive in un punto, aveva considerato le funzioni tali che

$$\left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right| < M \left[ \frac{n \omega(n)}{R} \right]^n,$$

$\omega(n)$  essendo una funzione monotona positiva, ed indica che per queste funzioni sussistono le proprietà classiche delle funzioni

<sup>(1)</sup> OGURA, *Bull. Scien. Math.*, 1821, t. 45, pag. 3140).

<sup>(2)</sup> M. GEVREY, *Annales de l'École Normales Sup.*, 1919, pag. 129.

<sup>(3)</sup> A. DENJOY, *C. R. T.* 173, pag. 1329.

<sup>(4)</sup> E. BOREL, *C. R. T.* 173, pag. 1481.

analitiche relative alle funzioni composte, implicite ecc. e che comprendono, come caso particolare, le funzioni quasi-analitiche.

**Funzioni in senso generale.** — T. CARLEMAN (*Ibid.*, T. 174, pag. 373).

In una nota recente A. DENJOY <sup>(1)</sup> ha pubblicato il seguente teorema: « Se  $f(x)$  è una funzione di variabile reale definita sul segmento  $(a, b)$  e possedente delle derivate di tutti gli ordini, se  $M_n$  essendo il massimo di  $|f^{(n)}(x)|$  sul segmento  $(a, b)$ , e la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$  è divergente e soddisfa a certe condizioni di regolarità,  $f(x)$  è identicamente nulla se essa s'annulla con tutte le sue derivate in un solo punto del segmento ».

Il CARLEMAN dimostra che il teorema di DENJOY resta vero anche se  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$  non soddisfa a quelle condizioni di regolarità.

— E. BOREL (*Ibid.*, T. 174, pag. 505) considera tutte le funzioni  $f(x)$  indefinitamente derivabili per  $0 < x < 1$  e tali che  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0$  e  $f(1) = 1$  e non identicamente nulle, allora essendo le  $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$  convergenti enuncia, come verosimile, il teorema che il massimo limite delle  $\sigma$  è finito.

— T. CARLEMAN (*Ibid.*, 174, pag. 994) dimostra il teorema enunciato, come verosimile, da E. BOREL e determina il massimo limite delle  $\sigma$ .

— E. BOREL (*Ibid.*, T. 174, pag. 996) mostra l'importanza del teorema precedente di CARLEMAN e di quello di DENJOY, che possono considerarsi teoremi fondamentali della teoria delle funzioni indefinitamente derivabili. g. b.

**Equazioni algebriche.** — S. SARANTOPOULOS. (*Ibid.*, T. 174, pag. 591).

Generalizza un teorema di LANDAU <sup>(2)</sup> dimostrando che una equazione

$$ax^y + a_n x^{y^n} + a_{n-1} x^{y^{n-1}} + \dots + a_1 x^{y^1} + x + 1 = 0,$$

<sup>(1)</sup> A. DENJOY, (*C. R. T.*, 173, pag. 1329).

<sup>(2)</sup> Ueber den Picardschen Satz. (Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, t. 51, pagg. 252-318).

nella quale  $a, a_1, a_2, \dots, a_r$  sono qualunque e  $v > v_r > v_{r-1} > \dots > v_1 > 1$ , ha almeno una radice non superiore ad un numero costante indipendente dai coefficienti e da  $v_1, v_2, \dots, v_r$  e dipendente solo dal numero dei termini.

**Equazioni algebriche.** — P. MONTEL (*Ibid.*, T. 174, pag. 850 e pag. 1220) precisa nella prima nota il risultato precedente indicando che l'equazione a  $k+1$  termini

$$a_{k-1}x^{m_{k-1}} + \dots + a_1x^{m_1} + x + 1 = 0$$

ha sempre una radice il cui modulo è inferiore od uguale a  $k$ . Il valore massimo di questo modulo non essendo raggiunto che per le radici dell'equazione

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = 0$$

e dà inoltre altre proposizioni per altri tipi di equazioni.

Nella seconda nota enuncia una proposizione che si riattacca alle note precedenti dello stesso autore, cioè, se

$$P(x) = Q(x) + R(x)(a_1x^{h_1} + a_2x^{h_2} + \dots + a_nx^{h_n}),$$

essendo  $R(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_n)^{\alpha_n}$  e  $0 \leq h_1 < h_2 < h_3 < \dots < h_n$  ed  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = p+1$ , ove  $p$  è il grado del polinomio  $Q(x)$ , assoggettato a prendere come alcune delle sue derivate dei valori dati in punti dati, questi valori essendo in numero sufficiente per determinare un polinomio di grado  $p$ , ha sempre  $p$  zero in un cerchio di centro l'origine il cui raggio non dipende che dai dati e dal numero  $k$  dei parametri arbitrari che figurano nel polinomio  $P(x)$ . Enuncia poi il teorema d'algebra:

« Il polinomio  $P(x) = 1 + x^p + a_1x^{p+q} + \dots + a_{k-1}x^{p+(k-1)q}$  ha sempre  $p$  zeri i cui moduli non oltrepassano un numero fisso indipendente da  $q$  e dal numero  $k$  dei termini, a condizione che  $p$  non sia divisibile per  $q$  ». g. b.

**Equazioni differenziali.** — A. CAHEN. (*Ibid.*, T. 174, pag. 276).

Considera l'equazione

$$F(x, y, y') = y'^2 - 2M(x, y)y' + N(x, y) = 0$$

a punti critici fissi di genere zero e secondo grado, ove  $M(x, y)$  ed  $N(x, y)$  sono polinomi di 2° o 4° grado al più ed indica delle forme di riduzione secondo la natura, l'ordine di molteplicità delle radici del discriminante  $D = M^2 - N$ , che è al più di 4° grado.

g. b.



**Equazioni differenziali.** — M. JANET. (*Ibid.*, T. 174, pag. 432).

Avvicina i risultati dei teoremi generali relativi ai sistemi di equazioni a derivate parziali a quelli che sono stati ottenuti da E. CARTAN <sup>(1)</sup> ed indica delle proposizioni facendone applicazioni.

— — W. WILKOSZ (*Ibid.*, T. 174, pag. 435) mostra che è superflua l'ipotesi della continuità delle  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) per legittimare le operazioni che si debbono fare nella teoria classica del potenziale, cioè, in quella dell'integrazione d'una equazione a derivate parziali della forma

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2).$$

*g. b.*

— — K. POPOFF. (*Ibid.*, T. 174, pag. 731).

Appoggiandosi sui lavori di PICARD <sup>(2)</sup> e sulle osservazioni di HÖLDER e di H. HADAMARD mostra che nella risoluzione dell'equazione generale del tipo ellittico a mezzo della teoria delle equazioni integrali non è necessario supporre che la soluzione della equazione debba essere integrabile.

*g. b.*

— — G. GIRAUD. (*Ibid.*, T. 174, pag. 853).

Precisa in differenti punti il ragionamento col quale ha stabilito l'analiticità delle soluzioni dell'equazione non lineare del tipo ellittico <sup>(3)</sup>.

*g. b.*

— — J. DRACH. (*Ibid.*, T. 174, pag. 797).

Tratta dell'equazione  $y'' = R(y')$ , ove  $R$  indica una frazione razionale di  $y'$  i cui termini sono di grado dato in  $y'$ , i loro coefficienti essendo funzioni qualunque di  $x$  e di  $y$  e stabilisce dei casi nei quali si può integrare per quadrature.

<sup>(1)</sup> E. CARTAN, *Annales de l'École Normale Sup.*, 1901 e 1904.

<sup>(2)</sup> ZAREMBA, *Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la physique*. (R. Circolo Mat. di Palermo, t. 19, 1905, pag. 147).

<sup>(3)</sup> E. PICARD, *Annales de l'École Normale*, t. 23, 1906, pag. 209.

<sup>(4)</sup> C. R. T. 173, 1921, pag. 543.

**Equazioni differenziali.** — M. JANET. (*Ibid.*, T. 174, pag. 391).

Dà una forma canonica invariante assoluto generale per i sistemi algebrici e differenziali (1).

— — E. GOURSAT. (*Ibid.*, T. 174, pag. 1089).

Mostra come il procedimento tenuto da E. CARTAN (2), per dimostrare come si possa dedurre da tutti gli invarianti integrali assoluti un invariante completo ed inversamente (invariante completo è un invariante ove il tempo figura non solamente ne coefficienti ma anche nel suo differenziale  $dt$  sotto il segno d integrale) è identico in realtà ad una combinazione dei metod di H. POINCARÉ.

*g. b*

**Equazioni integrali.** — H. VILLAT. (*Ibid.*, T. 174, pag. 656).

Stabilisce che un numero considerevole di ricerche sui fluid vorticosi dipende dal problema di determinare una rappresentazione conforme facente corrispondere ad un semipiano, per esempio, una regione per la quale due porzioni della frontiera possono essere condotte a coincidere per traslazione. Riconduce la questione ad una equazione integrale di cui dà un teorema d'esistenza e dei metodi rigorosi ed approssimati di risoluzione

— — I. FREDHOLM. (*Ibid.*, T. 174, pag. 980).

Sia  $\Phi(s)$  una funzione razionale tale che il semipiano superiore delle  $s$  sia conformemente rappresentato su un dominio  $I$  nel piano delle  $u$ , dalla relazione  $u = \Phi(s)$ . Considera l'equazione integrale lineare corrispondente al problema di DIRICHLET per il campo  $D$  e trova che si ha

$$\varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s) \varphi(s) ds = \alpha(t)$$

$$f(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{\Phi(s) - \Phi(t)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)},$$

$\Phi(s)$  e  $\bar{\Phi}(s)$  essendo delle funzioni razionali a coefficienti immaginari coniugati. Calcola il nucleo iterato e ne fa conoscere le proprietà.

*g. b*

(1) Vedasi DELASSUS (*Ann. de l'École Normale*, 1896-97, *Bullettin Sciences Math.*, 1889).

(2) E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*.

**Geometria differenziale.** — C. GUICHARD. (*Ibid.*, T. 174, pag. 138 e pag. 718).

In una nota precedente <sup>(1)</sup> ha trattato la geometria infinitesimale dei complessi lineari. Se  $M(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  è un punto che descrive un reticolato nello spazio d'ordine  $2n$ , e se  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}$ ,  $n_1, n_2, \dots, n_2$  sono i parametri normali delle tangenti ad un reticolato nello spazio  $S_{2n}$ , si ha:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\xi, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = h\eta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = h\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi,$$

e il reticolato sarà  $\Omega_{pq}$ , se

$$[\xi, n] = 0, \quad \left[ \xi, \frac{\partial \alpha \xi}{\partial u^\alpha} \right] = 0, \quad \left[ \eta, \frac{\partial \beta n}{\partial v^\beta} \right] = 0,$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, 2p - 3), \quad (\beta = 1, 2, \dots, 2q - 3)$$

e sarà  $\Omega_{00}$ , se

$$[\xi, n] = -mU + nV,$$

$U$  e  $V$  essendo rispettivamente funzioni della sola  $u$  e della sola  $v$ , sarà  $\Omega_{10}$  se  $V=0$ , e sarà  $\Omega_{01}$  se  $U=0$ , e  $\Omega_{11}$  se  $U=0$ ,  $V=0$ .

Nella prima nota tratta dei reticolati  $\Omega_{00}$ , e dimostra perchè un reticolato sia  $\Omega_{00}$ , è necessario e sufficiente che

$$\frac{\partial q}{\partial v} = nr, \quad \frac{\partial r}{\partial u} = mq, \quad \text{con } q = [\chi, \xi] - hu \quad \text{ed } r = [\chi, \eta] - lv.$$

Se esistono poi dei reticolati paralleli a  $\Omega_{00}$  e tali che  $q=r=0$ , questi saranno detti normali. L'Autore mostra che in  $S_{2n}$  vi sono  $2n$  reticolati normali, linearmente distinti, paralleli a  $\Omega_{00}$  e ne fa conoscere le proprietà.

Nella seconda nota dà delle applicazioni sui reticolati che sono armonici ad una congruenza appartenente ad un complesso lineare e coniugati ad un'altra congruenza appartenente pure ad un complesso lineare.

*g. b.*

(1) C. GUICHARD, (*C. R. T.*, 173, 1921, pag. 1145).

**Geometria differenziale.** — G. J. REMONDOS. (*Ibid.*, T. 174, pagina 519).

Modificando l'enunciato del problema considerato recentemente da APPELL<sup>(1)</sup>, tratta il problema del raccordamento di due semirette mediante curve regolari le più utili dal punto di vista delle applicazioni.

— — R. LAGRANGE (*Ibid.*, 174, pag. 521) come conseguenza del metodo d'esposizione del Calcolo differenziale assoluto dato recentemente dallo stesso Autore<sup>(2)</sup> ottiene per uno spazio  $S_n$  il teorema di DUPIN generalizzato e la seguente proposizione:

« Tutti gli spazi per i quali le due curvature totali di una  $V_{n-1}$  sono uguali, sono quelli in cui i covarianti doppi di RIEMANN  $T_{rk}$  sono identicamente nulli. g. b.

— — B. GAMBIER (*Ibid.*, T. 174, pag. 523, pag. 661, pag. 921, pagina 1110).

In una nota precedente<sup>(3)</sup> l'autore ha accennato a particolari corrispondenze che possono essere poste fra certe superficie convenientemente scelte con un'altra superficie.

Nella prima nota tratta il problema di determinare le coppie di superficie tali che la corrispondenza puntuale trasforma le linee di lunghezza nulla in assintotiche e viceversa<sup>(4)</sup>.

Nella seconda nota ne deduce alcuni altri risultati.

Nella terza nota studia le superficie isotermeche che non sono nè di rivoluzione, nè minime, di cui la rappresentazione sferica è isotermecha.

Nella quarta nota tratta il problema di associare due superficie con la corrispondenza delle linee di curvatura e delle assintotiche, ed ottiene delle superficie le cui equazioni a derivate parziale riproducono, a meno di un coefficiente, quelle di WEINGARTEN per le superficie isotermeche e che contengono, come caso particolare, le quadriche, le cilindri di DUPIN, le superficie di rivoluzione, le superficie minime, le superficie a curvatura costante (positiva o negativa). g. b.

(1) P. APPELL, *Courbe de raccordement et élastique plane*. (Bull. Soc. Math., t. 49, 1921, fasc. I e II, pag. 104).

(2) R. LAGRANGE, (*C. R. T.*, 173, pag. 1431).

(3) *C. R. T.* 173, pag. 763.

(4) OGURA, (*Tôhoku math. Journal*, V. 12, 1612).

**Teoria degli aggregati.** — M. STOILOW. (*Ibid.*, T. 174, pag. 802).

Dimostra che  $\int_{-\infty}^{+\infty} m(\xi) d\xi$ , ove  $m(\xi)$  indica la misura esterna lineare della parte comune di  $F$  e della  $x = \xi$ , essendo  $F$  un insieme chiuso contenuto in un insieme  $E$  e tale che  $E - F$  è di misura esterna minore di  $\varepsilon^2$  per piccola che sia questa quantità positiva  $\varepsilon$ , e che applicato all'insieme  $E$  esprime la misura di questo stesso insieme. g. b.

**Calcolo funzionale.** — G. JULIA. (*Ibid.*, T. 174, pag. 517, pag. 653, pag. 800).

Nella prima nota utilizza la rappresentazione conforme  $Z = f(z)$  per la ricerca delle soluzioni dell'equazione funzionale  $F[f(z), f(z_1)] = 0$ , ove  $z_1 = S(z)$ , essendo  $S(z)$  una data sostituzione lineare. Considera poi la superficie di RIEMANN più estesa possibile nella quale  $F(z, z_1)$  definisce una corrispondenza analitica biunivoca e che sia invariante per questa trasformazione e la sua inversa; mediante la rappresentazione conforme  $z = f(z)$  di questa superficie di RIEMANN nel campo d'esistenza della  $Z = f(z)$ , può ottenere  $f(z)$ . Fa applicazioni poi all'equazioni  $f(z + a) = R[f(z)]$ ,  $f(sz) = R[f(z)]$ ,  $f[R_1(z)] = f[R_2(z)]$ , essendo  $R$  simbolo di funzione razionale.

Nella seconda nota dà altre applicazioni della rappresentazione conforme alle equazioni funzionali.

Nella terza nota tratta la trasformazione delle sostituzioni razionali in sostituzioni lineari e cerca una funzione  $f(z)$  soddisfacente alla  $f[S(z) = R[f(z)]]$ , essendo  $z_1 R(z)$  una sostituzione razionale data ed  $S(z)$  una sostituzione lineare, e dà un metodo per trattare la questione. g. b.

**Geometria algebrica.** — M. LECAT. (*Ibid.*, T. 174, pag. 728).

Enuncia differenti risultati sulle cayleyane e bicayleyane anormali che si riallacciano ai lavori di CAYLEY <sup>(1)</sup>, R. F. SCOTT <sup>(2)</sup>, e di L. H. RICE <sup>(3)</sup> e dell'autore stesso sui determinanti generalizzati e specialmente cubici. g. b.

(1) CAYLEY, (Trans. Cambridge Philos. soc., t. 8, 1842-1849 e Papers t. 1, Cambridge, 1889, pag. 75-79).

(2) R. F. SCOTT, (London, Math. soc., t. II, 1876-80, pag. 1729).

(3) L. H. RICE, (Amer. J. of Math., t. 40, 1918, pag. 250-252).

**Geodesia.** — M. PREVOST. (*Ibid.*, T. 175, pag. 672).

Potendosi una funzione di due variabili  $y = f(\theta, \alpha)$  come la profondità degli oceani, il rilievo del suolo ecc.) svilupparsi in serie di polinomi di LAPLACE

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} y_n, \quad \text{essendo} \quad y_n = \sum_{j=0}^n P_{n,j}(\cos \theta)(A_{n,j} \cos j\alpha + B_{n,j} \sin j\alpha)$$

$$(j = 0, 1, \dots, n),$$

ove  $P_{n,j}$  sono funzioni armoniche sferiche,  $\theta$  la collatitudine,  $\alpha$  la longitudine, dà un metodo grafico per determinare i coefficienti.

*g. b.*

**Teoria degli errori.** — P. LÉVY. (*Ibid.*, T. 174, pag. 855 e pag. 1682).

Enuncia nella prima nota due condizioni generali a cui debbono soddisfare, le leggi, nella teoria degli errori, perchè siano ammissibili, cioè: i valori grandissimi dell'errore debbono essere pochissimo probabili ed alcuni errori debbono essere inapprezzabili rispetto all'errore totale. Indica poi delle condizioni nelle quali si può affermare che la somma di un grande numero di errori piccolissimi ed indipendenti l'uno dall'altro hanno una somma che obbedisce alla legge di GAUSS.

Nella seconda nota, dà una rettificazione di una proposizione della prima in seguito ad una nota di J. W. LINDBERG<sup>(1)</sup>. *g. b.*

**Relatività.** — E. CARTAN. (*Ibid.*, T. 174, pag. 437, pag. 593, pag. 734, pag. 857 e pag. 1104).

Nella prima nota dà un'interpretazione puramente geometrica del tensore d'EINSTEIN, che caratterizza completamente lo stato della materia nelle vicinanze d'un punto dell'Universo, mostrando che si può ricondurre la statica d'un mezzo elastico alla deformazione (non euclidea) dello spazio che lo contiene, la tensione del mezzo non fa che tradurre fisicamente la deformazione dello spazio.

Nella seconda nota dà una generalizzazione della curvatura di RIEMANN, e nella terza mostra che la definizione del tensore

(1) I. W. LINDBERG (*C. R. T. 174*, pag. 1400).

li energia si generalizza, senza difficoltà, se si riguarda l'Universo come uno spazio a quattro dimensioni dotato d'una curvatura o d'una torsione. Esso tensore è costituito da un vettore e dalle coppie attaccate a ciascun elemento di volume, il vettore indica la curvatura, le coppie la torsione; nella quarta tratta degli spazi conformi generalizzati estesi all'Universo d'EINSTEIN e nella quinta tratta dell'equazioni di struttura degli spazi generalizzati e dell'espressione analitica del tensore d'EINSTEIN.

**Relatività.** — E. BOMPIANI (*Ibid.*, T. 174, pag. 737) mostra che anteriormente ai lavori di CARTAN ha ottenuto dei risultati intimamente collegati con questi, essendosi occupato dell'interpretazione geometrica e cinematica di certi invarianti che si presentano nel Calcolo differenziale di RICCI e di LEVI-CIVITA (1). *g. b.*

— I. L. ROUX. (*Ibid.*, T. 174, pag. 924).

Mostra che considerandosi nella teoria della relatività una sola forma quadratica, si potranno calcolare degli invarianti che avranno una significazione analitica, ma non si ha il diritto di far corrispondere a questi invarianti una proprietà dello spazio. *g. b.*

— E. BOREL. (*Ibid.*, T. 174, pag. 980).

Dà un esempio d'una distribuzione di masse estendendosi all' $\infty$ , quasi periodiche con una densità media nulla, in relazione alle conferenze tenute da EINSTEIN alla Sorbonne. *g. b.*

*Sunti di dissertazioni inaugurali della Università di Giessen, del 1922 (2).*

**Geometria analitica.** — L. MONVILLE: *Analytische Beiträge zu Lie's Abbildung des Imaginären des ebenen Geometrie.* — Questa tesi riesuma e completa i risultati di taluni lavori giovanili di SOPHUS LIE. In alcune pubblicazioni degli anni 1869-70 (3), il grande matematico norvegese rappresentava il piano a coordinate cartesiane complesse

$$X = x + iy, \quad Z = z + ip,$$

(1) E. BOMPIANI, *Nozione di Parallelismo.* (C. Mat. di Palermo, 1917, t. 42; Accad. dei Lincei, vol. 28, 1919, pag. 425-428.

(2) Queste tesi sono pubblicate dal *Seminario Matematico* di quella Università.

(3) *Crelle*, T. 70, Christiania, *Forhand. i Videnskabs Selskabet*, 1869-70.

su uno spazio reale  $R$  a tre dimensioni,  $x, y, z, p$  essendo numeri reali, di cui i tre primi sono le coordinate cartesiane di un punto di  $R$  e l'ultimo è il peso del punto stesso, giungendo così, per via sintetica, a tradurre vari risultati della geometria del piano in altrettante proposizioni della geometria delle congruenze di rette, che in quell'epoca era stata svolta da poco dal PLÜCKER. La presente tesi, fatta sotto la direzione dell'ENGEL, noto discepolo del LIE, ritrova per via analitica i teoremi di questo, dati per lo più senza dimostrazione, e li estende, trattenendosi maggiormente su casi relativamente elementari.

Data la natura dell'argomento, sarebbe stata certamente utile all'estensore della presente tesi la conoscenza di lavori italiani di soggetto affine, in particolare di quelli noti del SEGRE che vanno sotto il titolo: « Un nuovo campo di ricerche geometriche » (1).

**Gruppi continui di trasformazioni.** — J. FUHRICH: *Zur natürlichen Geometrie ebener Transformations gruppen.* — In analogia alla Geometria intrinseca su una curva, studiata in ispecie dal CESARO, fu studiata da G. PICK (2) una « geometria naturale » dei gruppi continui ad  $r$  parametri del piano, sostituendo alle coordinate della geometria intrinseca due invarianti del gruppo, detti « Coordinate covarianti ». Questo concetto è stato ripreso e posto in maggiore relazione colle teorie del LIE dal KOWALEWSKI (3), che ha dato lo spunto al presente lavoro. L'autore della tesi, dopo alcune generalità sulle coordinate covarianti, le determina per tutti i gruppi finiti continui del piano, e precisamente per i primitivi, per quelli che ammettono un sistema invariante  $\infty^1$  di linee, e per quelli che ammettono due tali sistemi.

**Equazioni differenziali.** — J. MÖLL: *Ueber eine Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung.* — Questo lavoro reca un contributo all'integrazione delle equazioni differenziali il cui integrale generale  $y$  può porsi sotto la forma  $u:v$ , essendo  $u$  e  $v$  integrali generali di due equazioni differenziali lineari di ordini rispettivi  $m$  ed  $n$ . L'equazione cui soddisfa  $y$  è di ordine

(1) Varie note negli Atti dell'Accad. di Torino, 1890; v. anche *Le rappresentazioni reali delle forme complesse*, ecc. *Math. Ann.*, T. 40, 1892.

(2) *Berichte der Wien Akad.*, 1906.

(3) *Comptes rendus*, T. 158, 1914; *Böhm, Gesell. der Wissensch.*, 1919; *Leipzig, Berichte*, 1921.



$m + n - 1$ , omogenea nella  $y$  e le sue derivate: il caso  $m > n$  si riporta subito a quello  $m < n$ . Notevole il fatto che se si sa che una equazione differenziale ammette un integrale di tale forma, le due equazioni lineari cui soddisfano  $u$  e  $v$  si possono ottenere senza integrazione, agevolandosi così l'integrazione dell'equazione data. L'Autore tratta la questione per il caso in cui  $y$  soddisfa ad un'equazione di terz'ordine ( $m = 2, n = 2$ ) collegandovi, in un ultimo paragrafo, l'equazione di RICCATI; poi ad una equazione di quarto ordine ( $m = 3, n = 2$ ); infine ad un'equazione di quinto ordine che dà luogo a due casi ( $m = 4, n = 2$ , od  $m = 3, n = 3$ ). Il lavoro è prevalentemente di Calcolo, lasciando nel lettore il desiderio di qualche delucidazione di carattere geometrico o grupale, cui la forma dell'integrale (lineare fratto nelle costanti d'integrazione) sembrerebbe doversi prestare. s. p.

**Relatività.** — FRANZ TANK: *Sulle serie spettrali secondo il modello di Bohr* (« Annalen der Physik », 1919).

Le righe spettrali si possono ordinare secondo la loro frequenza in certe serie: la più semplice, scoperta dal BALMER nel 1885, è questa dell'idrogeno  $N\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ , dove  $N$  è una costante generale,  $n'$  un numero intero particolare ed  $n$  un numero percorrente la serie dei numeri interi. In seguito RYDBERG e RITZ riscontrarono le serie spettrali negli altri corpi, il primo introducendo il tipo  $N\left(\frac{1}{(n' + a)^2} - \frac{1}{(n + a)^2}\right)$ , il secondo in modo più preciso col suo tipo  $N\left(\frac{1}{\left(n' + a + \frac{\alpha}{n^2}\right)^2} - \frac{1}{\left(n + a + \frac{\alpha}{n^2}\right)^2}\right)$ , dove  $a$  ed  $\alpha$  sono costanti.

Il BOHR riuscì a dare una teoria della serie di BALMER dell'idrogeno, basandosi sulla teoria del PLANK, secondo cui la radiazione da un sistema atomico avviene per quanta, e sul modello del RUTHEFORD dell'atomo dell'idrogeno, consistente in un elettrone, che gira attorno ad un nucleo positivo. Il BOHR in memorie, che cominciano dal 1913, introduce l'ipotesi che, se per qualche agente esterno l'elettrone è cacciato fuori dalla sua orbita stazionaria in un'altra orbita, che diverrà alla sua volta stazionaria, esso subito irradia la differenza dell'energie nella forma di onde monocromatiche. Così egli giunse teoricamente alla serie di BALMER, in cui il numero percorrente la serie dei numeri interi caratterizza una delle orbite stazionarie.

Per la teoria delle serie spettrali tipo RITZ e RYDBERG, il SOMMERFELD aveva già indicato la via da seguire, cioè ricerca di modelli più complicati dell'atomo, specie con estensione allo spazio e specializzazione del campo atomico. Il TANK nello studio sopracitato non fa che battere questa strada e trova effettivamente modelli atomici, che spiegano le forme RYDBERG e RITZ. Per la prima, supponendo che gli elettroni costituenti, cioè quelli, che conservano la loro orbita e quindi non irradiano energia, girino sopra circonferenze simmetriche rispetto ad un asse, lo studio del movimento dell'elettrone, che irradia energia, cioè dell'elettrone serie, si riduce a quello di un movimento sotto l'influenza di due centri attrattivi. L'Autore, introducendo tre coordinate ellittiche, può integrare l'equazione differenziale di HAMILTON-JACOBI ed ottiene gli integrali momenti d'impulso dell'elettrone nella sua traiettoria ellittica, che, secondo le generalizzazioni di SOMMERFELD ed EPSTEIN per orbite ellittiche spaziali, sono uguagliati a multipli dell'energia elementare  $h$ , o quanta energetici. Detti integrali momenti d'impulso si risolvono per mezzo del principio dei residui nel campo dei numeri complessi, cioè sotto forma di integrali, presi lungo l'ellisse nel senso diretto, che valgono il prodotto di  $2\pi i$  per la somma dei residui relativi ai punti singolari dell'integrando, nel nostro caso nel polo e nel punto d'infinito. In funzione dei quanta e di note quantità, sparendo due costanti d'integrazione, rimane la terza costante, quella dell'energia dell'elettrone, che deve essere uguagliata, secondo EINSTEIN e BOHR, alla frequenza moltiplicata per la costante energetica generale  $h$ : otteniamo allora la frequenza appunto sotto la forma di RYDBERG. Confrontando le costanti teoriche con quelle sperimentali si arriva a costruire il modello atomico dell'elio, del parelio e del litio.

Per giungere poi alla forma sperimentale del RITZ, l'Autore suppone dapprima una perfetta simmetria radiale nell'atomo, cioè gli elettroni costituenti giranti in circonferenze complanari attorno al nucleo e l'elettrone serie nello stesso piano fuori delle orbite dei primi. Con integrazioni nel campo complesso, analoghe alle precedenti, si ottiene la forma del RITZ e, per confronto colle costanti della serie del sodio, se ne può costruire un modello atomico piano. Ma anche per il sodio si dimostra più rispondente alle condizioni reali un modello spaziale con simmetria sferica.

*g. d. n.*