Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giulio Supino

Sui poligoni del Cremona

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.1, p. 13–18.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_13_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

Sui poligoni del Cremona.

Nota di GIULIO SUPINO

È noto che, data una travatura reticolare piana, staticamente determinata, e conosciute per un dato sistema di forze esterne le reazioni dei vincoli, si possono ottenere (in generale) gli sforzi nelle aste colla costruzione di poligoni, dati dal CREMONA ricavandoli dalla teoria delle figure reciproche nello spazio. Ora io mi propongo di mostrare che, se la travatura è anche strettamente vincolata (se cioè i vincoli sono soltanto tre), gli stessi poligoni si possono costruire anche quando non sono note le reazioni, potendo essi stessi servire a determinarle; p[illegible] in generale, poi, dimostrerò che il poligono del CREMONA pu[illegible]uire, nella composizione di forze compiane, non concorrenti, [illegible]gono funicolare; a che l'analogia tra le due costruzioni risulti più manifesta trovo opportuno ricordare che anche il poligono f[illegible]colare è un poligono reciproco: però siccome la teoria delle figure reciproche è rimasta senza altre applicazioni e come isolata nella scienza delle costruzioni, io non studierò i poligoni cremoniani da questo punto di vista ed, anzi, nel primo paragrafo, cercherò di costruire i poligoni stessi solo in base ad osservazioni che partano direttamente dalla considerazione dei poligoni delle forze (ciò che, fino ad ora, non mi consta sia stato fatto in modo esauriente). Se, così facendo, sfuggiranno alcuni confronti col poligono funicolare, parmi tuttavia che oltre a tenere la trattazione su basi più elementari, riesca ad una maggiore unità di metodo.

Sia data una travatura reticolare, staticamente determinata, in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne e delle reazioni dei vincoli, e costruiamo, per essa, tutti i poligoni delle forze relativi ai vari nodi: essi risultano chiusi ed inoltre soddisfano senz'altro alle seguenti tre condizioni:

1.° il numero dei lati del poligono delle forze è uguale al numero delle forze facenti capo al nodo;

2.° i lati del poligono sono paralleli alle forze che rappresentano;

3.° a forze facenti capo a un punto corrisponde un poligono chiuso.

Ma, per due nodi congiunti da un'asta, i relativi poligoni hanno uguali le due linee rappresentanti lo sforzo dell'asta; conveniamo allora di riunire i due poligoni in modo, che la linea rappresentatrice dello sforzo dell'asta comune ai due nodi, sia comune ai due poligoni. Imponiamo, di più, all'aggruppamento di essi di soddisfare alla condizione che le forze esterne e le reazioni dei vincoli formino da sole un poligono chiuso in cui l'ordine delle forze sia lo stesso di quello con cui le stesse forze si presentano percorrendo le aste della travatura in un determinato senso.

Con ciò resta ancora indeterminato se il senso in cui le forze esterne si incontrano percorrendo il poligono delle forze sia lo stesso o l'opposto di quello in cui esse si trovano sulla travatura: la convenzione resta all'arbitrio del disegnatore. Le due ultime condizioni poste possono coesistere essendo indipendenti l'una dall'altra: di più, unite alle tre precedenti, determinano una costruzione dell'aggruppamento di poligoni, che è unica, come si vede osservando che con esse è determinato anche l'ordine dei lati del poligono delle forze relativo ad un nodo generico. È questo l'aggruppamento di poligoni che prende il nome di poligoni del CREMONA.

Aggiungiamo che per tracciare un tale poligono è utile conoscere la seguente regola: *le aste che nella travatura concorrono a formare un triangolo chiuso hanno i segmenti rappresentativi degli sforzi nel poligono del Cremona concorrenti ad uno stesso punto.*

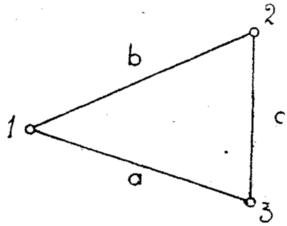

Fig. 1

E difatti date tre aste a, b, c (v. fig. 1) concorrenti a-b in 1, b-c in 2, c-a in 3, e supponendo descritti i poligoni 1 e 2, essi hanno a comune il lato b; i poligoni 1 e 3 hanno invece a comune il lato a; il lato c deve concorrere con a per formare un poligono chiuso escludendo però b; e deve formare un poligono chiuso con *b*, ma escludendo *a*: occorre quindi che passi per la intersezione dei due lati *a* e *b* [1]. c. d. d.

***

Finora ci siamo occupati dell'equilibrio della travatura e dei poligoni cremoniani che ne risultano, supponendo già noti e tracciati i poligoni delle forze, ma non è questo il caso che più c'interessa: in pratica capita spesso che nelle travature reticolari si possa procedere allo studio dell'equilibrio considerando successivamente i vari nodi in modo che le incognite che via via si presentano non siano mai più di due: in tal caso conosciute le forze esterne e le reazioni e osservando le regole ora dettate, riesce molto agevole la costruzione dei poligoni cremoniani e quindi la determinazione degli sforzi delle varie aste. Altre volte occorre aiutarsi in alcuni punti con altri metodi (cfr. Guidi, *Scienza delle Costruzioni*).

In tutti i casi però le costruzioni ora proposte semplificano molto la risoluzione pratica del problema. Su questo punto non mi fermerò essendo già sufficientemente noto.

***

Invece, una osservazione che credo nuova, riguarda la determinazione delle reazioni a mezzo di poligoni cremoniani. Occorre qui introdurre l'ipotesi restrittiva che la travatura piana sia strettamente vincolata onde essa avrà o un appoggio fisso e uno scorrevole o tre appoggi scorrevoli. Comunque la condizione di equilibrio si esprimerà col fatto che saranno chiusi sia il poligono relativo alle forze esterne e alle reazioni, sia il loro poligono funicolare. Ma in luogo di questa condizione potremo porre l'altra che tutti i poligoni relativi ai vari nodi della travatura risultino chiusi ed è questa che utilizzeremo. Consideriamo separatamente i due tipi di travatura.

1. *Travatura reticolare con un appoggio fisso e un appoggio scorrevole.* — In questo caso è nota la direzione della reazione dell'appoggio scorrevole (che indicheremo con *A*) e se fosse nota anche la sua intensità sarebbe conosciuta interamente anche la

(1) Veramente potrebbe anche soddisfarsi alla condizione posta se i tre sforzi facessero un triangolo come le aste; in tal caso però si viene ad imporre una relazione tra gli sforzi delle tre aste (il triangolo dovrebbe essere simile a quello delle aste) relazione che invece non esiste onde questo caso si esclude da sè.

reazione dell'appoggio fisso (che indicheremo con B) perchè si sa che il poligono delle forze deve essere chiuso; così l'incognita si riduce al solo punto x di separazione delle due reazioni (vedi fig. 2). Prendiamo allora un punto ad arbitrio sulla retta della reazione A: resteranno perciò determinati A e B, e potremo costruire per questa condizione il poligono del CREMONA; ma in esso, per quanto si è detto sopra, l'ultimo poligono delle forze non potrà, in generale, chiudersi (perchè con le reazioni così scelte la travatura resterà sottoposta a un certo momento), e ciò dimostra che la risultante degli n-1 suoi lati non è diretta secondo l'ennesimo (che è certo una asta): potremo quindi scomporre questa risultante (applicata ai due nodi in cui l'asta fa capo) in due: una diretta secondo l'asta e una normale ad essa: questa ultima rappresenta le forze che sono applicate alle due estremità dell'asta senza potersi fare equilibrio. Ma allora la coppia è determinata perchè detta F l'intensità di questa forza e l la lunghezza dell'asta il momento risultante è $2Fl$: poichè esso deve essere equilibrato dalle reazioni ne viene che (detta L la loro distanza misurata innalzando dall'appoggio fisso la perpendicolare alla reazione dell'appoggio scorrevole), al sistema di reazioni A e B occorre sostituire il sistema che si ottiene componendo ad A e a B due forze di senso opposto e di intensità $-F\frac{l}{L}$. Con ciò resta determinato il punto x_1 di effettiva separazione di A e B.

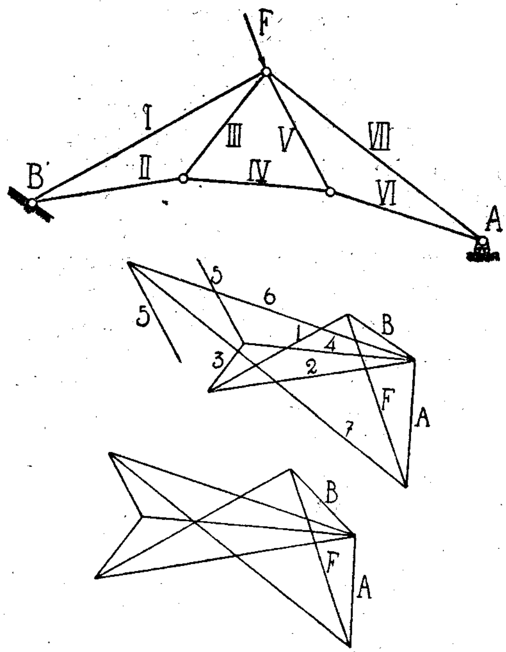

Fig. 2

2. *Travatura reticolare con tre appoggi scorrevoli.* — In questo caso sono incognite le intensità delle tre reazioni (che indicheremo con A, B e C) ma sono note le loro direzioni onde, dato il

punto x di separazione tra A e B, resta determinato y di separazione tra B e C e quindi l'intensità di ognuna di esse. Anche qui dunque l'incognita è una sola. Fissato allora x ad arbitrio e determinate quindi A, B e C costruiamo il poligono cremoniano

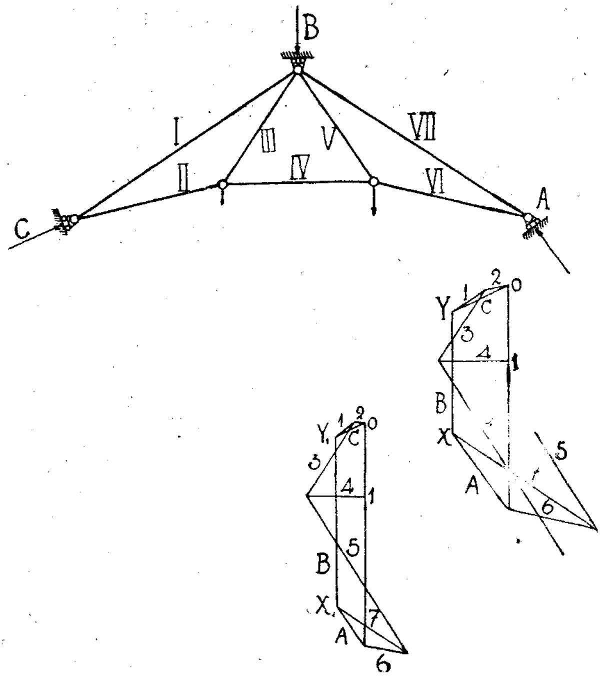

Fig. 3

in corrispondenza di questi valori delle reazioni: in generale esso resterà aperto e l'intensità del momento risultante sarà data da $2Fl$ (l lunghezza dell'asta). Componiamo allora B con C e detta R la loro risultante sia L la distanza di A da R misurata perpendicolarmente ad A dal punto di applicazione di R: sarà $+\frac{Fl}{L}$ la forza che va sottratta da A perchè la travatura sia in equilibrio (vedi fig. 3).

***

L'importanza delle considerazioni ora esposte non è tanto nella determinazione delle reazioni con questo metodo o nella loro verifica, quanto il fatto, che già si intravede, che il poligono cremoniano può sostituire il poligono funicolare. Supponiamo, infatti, date nel piano m forze, applicate in n punti ($n \leq m$); se il poligono delle forze risulta chiuso, possiamo immaginare questi n punti come nodi di una travatura reticolare strettamente vincolata e, assunte tre delle forze come reazioni (o due se si considera un appoggio fisso), costruire per essa il diagramma cremoniano: se esso risulta chiuso le forze date sono in equilibrio; diversamente esiste una coppia la cui determinazione è semplice dopo quanto si è detto.

Se poi il poligono delle forze risulta aperto, allora esso dà la direzione della risultante: per avere il punto di applicazione basta costruire il poligono cremoniano relativo ad una travatura a cui si appoggino le forze date (eccetto la risultante), e, chiuso con due lati arbitrari includenti la risultante il poligono cremoniano, condurre dai nodi corrispondenti della travatura le due aste parallele. Il punto di incontro di esse è un punto della linea d'azione della risultante (vedi fig. 4). Con questo metodo si possono risolvere facilmente alcuni problemi relativi a sistemi di forze compiane. Così, per esempio, osservando che, dato un sistema di forze complanari

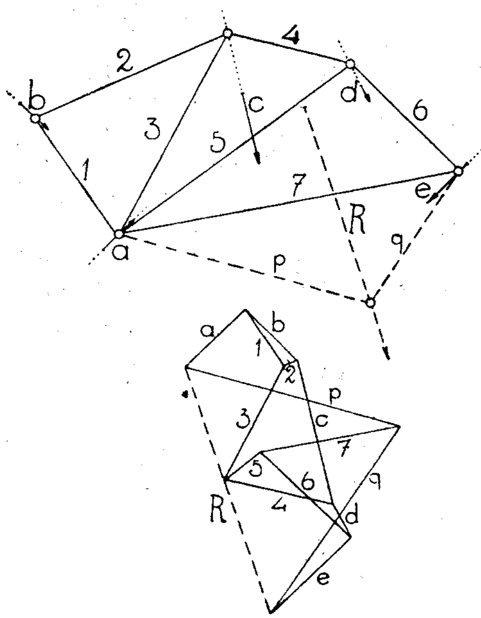

Fig. 4

applicate a determinati punti, il relativo poligono delle forze può chiudersi modificando solo l'intensità di due di esse, mentre, per quanto si è visto circa i poligoni cremoniani, il momento può essere eliminato variando solo l'intensità di tre forze (due delle quali possono coincidere con le due precedenti), segue una costruzione che permette di risolvere il problema di meccanica: *dato un sistema di forze complanari non in equilibrio, equilibrarle variando solo l'intensità di tre di esse assegnate ad arbitrio.*

Venezia, gennaio 1923.