BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

COSTANTIN CARATHÉODORY

Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.1, p. 2–6.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_2_0>

Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio.

Nota di COSTANTIN CARATHÉODORY

(Estratto di una lettera a LEONIDA TONELLI)

Caro Collega,

1. Ella mi pone la questione seguente: dato un problema di Calcolo delle Variazioni, definito positivo e regolare in tutto il piano, le estremali uscenti da uno stesso punto formano sempre un campo ricoprente l'intero piano, allorchè si sa che due estremali qualunque non possono incontrarsi in più di un punto, o più specialmente, allorchè la condizione di JACOBI è sempre e ovunque verificata?

Secondo quanto mi ha comunicato, Ella ha dimostrato questa proprietà nel caso in cui la funzione $F(x, y; x', y')$, sotto l'integrale, verifica, per tutti i punti del piano esterni ad un cerchio fisso, la condizione supplementare

$$F(x, y;\ \cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta) > \frac{\alpha}{r},$$

nella quale α indica una costante positiva ed r è dato da $r^2 = x^2 + y^2$.

Vedremo fra poco, con un esempio che mi sembra molto interessante, che senza una restrizione di questo genere il teorema è falso. Vorrei tuttavia proporle di sostituire la sua condizione con un'altra, che contiene la sua come caso particolare, e che sembra più naturale. A tale condizione sono stato condotto esaminando le proprietà di *Analysis situs* dalle quali dipende il teorema che ci interessa, e che ora esporrò.

2. Sia O un punto dello spazio Σ ad n dimensioni, e sia esso l'origine di un insieme di curve C, i cui punti dipendano da un parametro t, variante da zero all'infinito positivo allorchè si percorre interamente ciascuna curva. Supponiamo, inoltre, che ogni curva C possieda in O la tangente, e che ogni semiretta uscente da O sia tangente, in questo punto, ad una delle nostre curve e ad una sola.

Costruiamo uno spazio parametrico Π, anch'esso ad n dimensioni, nel quale le semirette uscenti da un punto O_1 di Π siano le immagini delle nostre curve C. Questa rappresentazione delle nostre curve C è anche scelta in modo che si possano sovrapporre gli spazi Π e Σ facendo coincidere i punti O ed O_1, e facendo pure coincidere la tangente in O a ciascuna delle nostre curve con la semiretta uscente da O_1 che rappresenta la curva medesima. Di più, supponiamo che ad ogni punto P, situato su C e corrispondente ad un valore t del parametro, corrisponda un punto P_1 di Π la cui distanza euclidea da O_1 sia eguale a t.

3. Ogni punto P_1 dello spazio parametrico Π è così l'immagine di un punto P dello spazio Σ. Imponiamo ora, all'insieme delle nostre curve C, una *prima condizione*, che formuliamo nel modo seguente:

Per ogni punto P_1 di Π, diverso da O_1, esiste un intorno $V(P_1)$, che è l'immagine continua e uniforme di un intorno $V(P)$ del punto P di Σ corrispondente a P_1, vale a dire, tale che due punti qualunque Q_1 e R_1 di $V(P_1)$ non possano mai essere l'immagine di uno stesso punto di Σ. Di più, supponiamo che la rappresentazione di Π su Σ sia continua in O_1, vale a dire, che ad ogni successione di punti P_1', P_1'',...., convergente verso O_1, corrisponda nello spazio Σ una successione di punti P', P'',.... convergente verso O.

Rileviamo che dal fatto di supporre il punto P_1 diverso da O_1 non segue come conseguenza che il punto P sia diverso da O. Infatti, non escludiamo *a priori* il caso di una curva C avente dei punti coincidenti con O per valori positivi del parametro.

4. Una conseguenza della condizione enunciata nel n.° precedente, è che i punti di Π corrispondenti ad uno stesso punto di Σ, ed in particolare i punti di Π corrispondenti ad O, non possono avere, in tutto lo spazio Π, punti limiti distinti da O_1.

5. Sia P un punto dello spazio Σ, che corrisponda al punto P_1 dello spazio parametrico Π, e sia γ una curva rettificabile qualunque, avente la sua origine in P. In virtù della condizione enunciata al n.° 3, esisterà, nell'interno di un certo intorno $V(P_1)$ di P_1, un arco di curva γ_1' corrispondente alla parte γ' di γ interna all'intorno $V(P)$ di P, e compresa fra P ed un punto P' dell'arco γ. Operando come per il prolungamento di una funzione analitica, si potrà eventualmente costruire, nello spazio Π, un arco di curva γ_1'', attaccantesi a γ_1', e corrispondente ad un certo prolungamento γ'' di γ', sulla nostra curva γ. L'arco di curva $\gamma_1 = \gamma_1' + \gamma_1'' + \ldots$, che si otterrà in questo modo, è determinato senza alcuna ambiguità ed è, pertanto, unico. Ma, per essere sicuri che esiste in tutti i casi un arco γ_1 corrispondente a tutta l'intera curva γ, dobbiamo imporre alla corrispondenza dei punti di Π con quelli di Σ una *seconda condizione*, che enunciamo come segue:

Sia $\gamma(A, B)$ un arco di curva rettificabile, congiungente i punti A e B dello spazio Σ e non contenente il punto O, e supponiamo che a tutti i punti di questo arco, con la sola eccezione del punto B, corrispondano i punti di un arco di curva γ_1, situata nello spazio parametrico Π. Sotto questa condizione, la curva γ_1 forma sempre un insieme limitato di punti di Π.

Ammessa questa seconda condizione, sia P', P'',... una successione di punti di $\gamma(A, B)$ convergente verso B, e siano P_1', P_1'',... i punti dello spazio parametrico Π, situati su γ_1, immagini dei precedenti. Siccome per l'ipotesi ora fatta la curva γ_1 è limitata, la successione P_1', P_1'',... ammette almeno un punto limite B_1, diverso certamente da O_1 poichè P', P'',... non convergono verso O. Il punto B_1 è dunque l'immagine di un punto B^* che contiene, nell'interno di ciascuno dei suoi intorni, un'infinità di punti della successione P', P'',.... e che per conseguenza coincide certamente con B. Si può allora congiungere il punto B_1 con almeno un punto della successione P_1', P_1'',... mediante un arco di curva $\bar{\gamma}_1$ che corrisponda ad una porzione della curva $\gamma(A, B)$. Tale arco di curva $\bar{\gamma}_1$ si unisce alla curva γ_1 che si costruisce, per prolungamenti successivi, partendo da A_1, e poichè questa curva non può essere descritta che in un sol modo fino ad uno qualunque dei punti $P_1^{(n)}$, se ne conclude che la successione P_1', P_1'',... non può avere che un solo punto limite, e che converge verso B_1.

6. Sia ora A un punto dello spazio Σ per il quale passi una delle nostre curve C, e che è, pertanto, l'immagine di un punto A_1 dello spazio Π, e sia B un altro punto qualunque di Σ. Supponiamo, di più, che A e B differiscano entrambi da O.

Uniamo questi due punti con una curva rettificabile γ, la quale non contenga O. In virtù delle considerazioni precedenti, esiste in Π una curva γ_1, immagine di γ, avente un'estremità B_1 corrispondente al punto B. Ne deduciamo che *per ciascun punto di Σ passa una delle nostre curve C, e che, pertanto, queste curve ricoprono tutto lo spazio.*

7. Dalla *prima condizione*, enunciata al n.° 3, otteniamo che, se P_1 e P sono due punti corrispondenti, rispettivamente di Π e di Σ, e se γ è una curva chiusa contenuta in $V(P)$, la curva corrispondente γ_1 di $V(P_1)$ è ugualmente chiusa. Ne deduciamo quindi, ragionando come si fa di solito per dimostrare per esempio il teorema di STOKES, che, se si fa variare in modo continuo, e senza mai passare per il punto O, una curva γ che unisca due punti A e B di Σ, e se, in questa variazione, si mantengono le estremità A e B, di γ, e l'estremità A_1, dell'immagine γ_1 di γ, nelle loro posizioni iniziali, l'altra estremità B_1 di γ_1 resta ugualmente immobile.

8. Vogliamo ora provare, quando sia $n \geqq 3$, vale a dire, quando lo spazio Σ sia ad almeno tre dimensioni, che due punti distinti P_1' e P_1 di Π non possono mai corrispondere ad uno stesso punto di Σ.

Ammesso il contrario e supposto, per cominciare, che P_1' e P_1'' corrispondano ambedue ad un medesimo punto P distinto da O, uniamo P_1' e P_1'' con una curva γ_1 che non incontri nè O_1 nè alcuno degli altri punti dello spazio Π, se ne esistono, che corrispondano al punto O dello spazio Σ. Questa costruzione è sempre possibile giacchè i punti ora indicati sono isolati (n.° 4).

La curva γ dello spazio Σ che corrisponde a γ_1 è, nella nostra ipotesi, una curva chiusa con le due estremità confondentisi in P, e che, di più, non passa per O. Si può dunque ridurla, per deformazione continua, al solo punto P senza mai passare per O durante questa operazione. Ora ciò conduce ad una contraddizione, poichè, se si costruiscono le curve γ_1, dello spazio Π, che hanno P_1' per origine e γ per immagine ad ogni istante della deformazione, la seconda estremità di queste curve γ_1 resta, da una parte, immobile e deve perciò coincidere sempre con P_1'', mentre, d'altra parte, la curva γ deve avere, da un certo momento in poi, per immagine una curva chiusa.

Supponiamo, in secondo luogo, che P_1' coincida con O_1, e che P_1'' sia l'immagine del punto O. Consideriamo, nello spazio Π una successione di punti Q_1', Q_1'',..., nessuno dei quali sia l'immagine di O, convergenti verso O_1. I punti Q', Q'',..., ai quali essi corrispondono, in Σ devono convergere verso O, e poichè P_1'' corrisponde ad O, esistono anche dei punti R_1', R_1'',..., convergenti verso P_1'' e corrispondenti ai punti Q', Q'',.... A partire da un certo valore di n, i punti $Q_1^{(n)}$ e $R_1^{(n)}$ sono necessariamente distinti e corrispondono ad un medesimo punto $Q^{(n)}$ di Σ, distinto da O, ciò che, come abbiamo già veduto, è impossibile.

Esiste dunque una corrispondenza continua, univoca e reciproca fra i punti degli spazi Σ e Π.

Possiamo esprimere questo fatto nel modo seguente:

TEOREMA. *Ogni famiglia di curve C verificante le due condizioni più sopra indicate, ricopre tutto lo spazio Σ. Inoltre, per ogni punto di Σ passa una ed una sola curva C, e queste curve non hanno punti doppi e, in particolare, non passano mai una seconda volta per il punto O.*

9. È da presumersi che il teorema ora dimostrato, per $n > 3$, sia valido, sotto le stesse ipotesi, anche per $n = 2$; la dimostrazione sembra però, in questo caso, assai più complicata. Per poter applicare anche nel caso di $n = 2$ la nostra dimostrazione, faremo l'ipotesi supplementare — la quale, in particolare, è sempre verificata per i problemi del Calcolo delle variazioni — *che la prima condizione, enunciata al n.° 3, sia verificata anche se il punto P_1 coincide con O_1*. Si può allora, nella dimostrazione del n.° precedente, far variare la curva γ attraversando il punto O, e non vi è più alcuna difficoltà. *(continua)*

Atene, gennaio 1923.