Costantin Carathéodory

Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.2, p. 48–52.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_48_0>

Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio.

Nota di COSTANTIN CARATHÉODORY [1]

APPLICAZIONE AL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

10. Consideriamo un problema di Calcolo delle Variazioni, definito positivo e regolare in tutto lo spazio ad n dimensioni. Se, per esprimere la funzione sotto l'integrale che definisce il nostro problema, usiamo la notazione di WEIERSTRASS

$$F(x_i\,;\,x_i'),\quad (i=1,\,2,\dots,\,n),$$

ponendo, per ogni valore positivo di λ,

$$F(x_i\,;\,\lambda x_i')=\lambda F(x_i\,;\,x_i'),$$

le condizioni precedenti sono date dalle formule

$$F>0,\quad \sum_{i,j} F_{x_i' x_j'}\xi_i\xi_j>0,$$

la seconda delle quali esprime che la figurativa è sempre convessa.

Supponiamo, in secondo luogo, che gli archi di estremali passanti per un punto O dello spazio Σ non abbiano mai inviluppo, comunque essi si prolunghino. Questa ipotesi è, in sostanza, identica alla nostra prima condizione del n.° 3; basterà dunque verificare la seconda.

11. A questo scopo, scegliamo come parametro t la lunghezza euclidea delle estremali, misurate nello spazio Σ, e costruiamo, come al n.° 2, il nostro spazio parametrico Π. Sia P_1 un punto qualunque dell'ipersfera S_1 avente O_1 come centro e raggio uguale ad uno, e indichiamo con

$$I(P_1,\,t)=\int_0^t F dt \tag{1}$$

il valore dell'integrale del nostro problema, calcolato lungo un arco d'estremale uscente da O, di lunghezza euclidea t, e tale

[1] Continuazione della nota a pag. 2.

che l'immagine di questa estremale contenga P_1. Consideriamo, sull'ipersfera S_1, la funzione

$$\varphi(P_1, t) = \frac{1}{I(P_1, t)}. \tag{2}$$

Questa funzione è, per ogni valore fisso di t, una funzione continua del punto P_1, e, per ogni valore fisso di P_1, una funzione decrescente di t, poichè la F è positiva. La funzione

$$\varphi(P_1) = \lim_{t=\infty} \varphi(P_1, t) \tag{3}$$

rappresenta sull'ipersfera S_1 — come limite di una successione decrescente di funzioni continue — o una funzione continua oppure una funzione semicontinua superiormente.

Affermiamo che la seconda condizione, enunciata nel n.° 5, risulta verificata se $\varphi(P_1)$ è una funzione continua del punto P_1 di S_1.

12. Sia, infatti, $\gamma(A, B)$ una curva rettificabile, di lunghezza σ, congiungente due punti A e B dello spazio Σ, e indichiamo con s la lunghezza di γ misurata a partire da A e fino ad un punto qualunque di questa curva, precedente B. Supponiamo che si possa unire ciascun punto di $\gamma(A, B)$ — con la sola eccezione del punto B — col punto O mediante un arco di estremale uscente da O. Ad ognuna di queste estremali corrisponderanno, per il n.° precedente, un punto $P_1(s)$ di S_1 ed un valore $t(s)$ del parametro. Per mostrare che la nostra seconda condizione del n.° 5 è verificata, basterà allora provare che la funzione $t(s)$ è limitata per i valori $0 \leq s < \sigma$ della variabile s.

Indichiamo con M ed m i limiti superiore ed inferiore di

$$F(x_i; x_i') : \sqrt{\Sigma x_i'^2}$$

allorchè il punto di coordinate x_i è ad una distanza da A minore di $\sigma + 1$, e qualunque siano le variabili x_i'. Osserviamo che, sotto queste condizioni, il numero M è finito, e che m è positivo e diverso da zero. Abbiamo, pertanto, per tutti i valori considerati di s,

$$m \leq I[P_1(s), t(s) + 1] - I[P_1(s), t(s)] \leq M. \tag{4}$$

Inoltre, abbiamo, in virtù della formula di WEIERSTRASS,

$$I[P_1(s), t(s)] - I[(P_1(0), t(0)] + \int_{\gamma 0}^{s} E ds = \int_{\gamma 0}^{s} F ds.$$

E essendo la funzione di WEIERSTRASS, la quale, per le nostre ipotesi, non è mai negativa. Deduciamo dunque, dall' ultima relazione,

$$(5) \qquad I[P_1(s),\ t(s)] \leq I[P_1(0),\ t(0)] + \int_{\gamma 0}^{s} F ds < I[P_1(0),\ t(0)] + M\sigma;$$

e se noi poniamo

$$N = M(\sigma + 1) + I[P_1(0),\ t(0)],$$

abbiamo, da (4) e (5),

$$(6) \qquad I[P_1(s),\ t(s)] < I[P_1(s),\ t(s) + 1] < N,$$

e, introducendo la funzione φ e utilizzando (4) e (6),

$$\varphi[P_1(s),\ t(s)] - \varphi[P_1(s),\ t(s) + 1] > \frac{m}{N^2}.$$

Avremo dunque, *a fortiori*, per la (3),

$$(7) \qquad \varphi[P_1(s),\ t(s)] - \varphi(P_1) > \frac{m}{N^2}.$$

Ora, per ipotesi, la funzione $\varphi(P_1)$ è continua, ed è noto che una successione monotona di funzioni continue, la quale converga, su un insieme limitato e perfetto, verso una funzione continua, converge uniformemente (¹). Esisterà perciò un numero finito T tale che, per ogni valore di $t \geq T$ e per ogni punto P_1 di S_1, sarà sempre verificata la disuguaglianza

$$\varphi(P_1,\ t) - \varphi(P_1) \leq \frac{m}{N^2}.$$

Ne concludiamo che, per tutti i valori considerati di s, si ha $t(s) < T$, e la condizione del n.° 5 è così verificata.

13. La continuità di $\varphi(P_1)$ è, in particolare, assicurata, se il valore dell' integrale

$$\int F ds$$

supera qualunque numero dato lungo ogni estremale uscente da O e sufficientemente prolungata, poichè allora $\varphi(P_1)$ è identicamente

(¹) V. per es. le mie *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Berlin und Leipzig, Teubner 1918) § 174, Teorema 4.

nullo: e quest'ultima condizione è, a sua volta, verificata se ha luogo la disuguaglianza

$$F : \sqrt{\Sigma x_i'^2} > \frac{\alpha}{r},$$

indicata nel n.° 1.

14. È facile vedere che la condizione $\varphi(P_1) = 0$ è verificata per tutte le estremali passanti per un punto qualunque dello spazio, quando essa lo sia per le estremali uscenti dal punto O. Ed infatti, se esistesse un' estremale e' uscente da un punto O' ed avente una lunghezza geodetica finita, se ne concluderebbe, in primo luogo, che tale estremale finirebbe sempre per uscire definitivamente dall' interno di ogni dominio limitato, poichè la funzione $F : \sqrt{\Sigma x_i'^2}$ possiede un minimo positivo, diverso da zero, in un simile dominio. Si potrebbe perciò trovare una successione di punti di e': P', P'',..., convergente verso l'infinito, ed una successione di archi di curva C', C'',..., uscenti da O e terminanti ai punti P', P'',..., in modo che gli integrali

$$_{C^{(n)}}\int_0^{P^{(n)}} F ds$$

fossero tutti inferiori ad un numero fisso N. Basterebbe, per questo, di scegliere come curva $C^{(n)}$ il segmento rettilineo congiungente O e O', seguito dall' arco dell' estremale e' compreso fra O' e $P^{(n)}$. Ne seguirebbe che la lunghezza geodetica dell' estremale congiungente O con $P^{(n)}$ dovrebbe ugualmente essere inferiore ad N, ciò che è impossibile perchè, da una parte, i punti $P^{(n)}$ convergerebbero all' infinito, e, dall'altra, la funzione $\varphi(P_1, t)$ convergerebbe uniformemente verso lo zero, per t tendente verso l' infinito.

15. Si vede immediatamente che la nostra seconda condizione, enunciata nel n.° 5, è necessaria affinchè il teorema del n.° 8 abbia luogo. Non può dirsi però altrettanto della condizione del n.° 11. Si possono, infatti, facilmente immaginare degli esempi nei quali le estremali uscenti da un punto O ricoprono uniformemente l' intero spazio senza che la funzione $\varphi(P_1)$ sia continua. Sarebbe, peraltro, più interessante vedere ché è sufficiente che per ogni punto dello spazio passi *una sola* estremale, di lunghezza geodetica finita, affinchè — tutte le altre nostre condizioni essendo vericate — l'insieme delle estremali passanti per un punto qualunque dello spazio non ricopra sempre tutto questo spazio.

È ciò che mostra l'esempio seguente, che mi sembra assai istruttivo anche sotto altri riguardi.

Esso è pure uno degli esempi migliori che io conosca per mostrare la caducità del principio di DIRICHLET.

(continua)