
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * U. Cisotti: Idrodinamica piana
- * T. Levi-Civita: Questions de mécanique classique i relativista
- * Fr. Kaderavek: Perspektiva

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 2 (1923), n.2, p. 70–76.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_70_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_70_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

U. CISOTTI: *Idrodinamica piana*. 2 volumi, 1921-22, (Libreria Ed. Polif. di Milano).

In quest'opera son trattati in maniera ampia e sistematica i numerosi problemi antichi e nuovi relativi all'idrodinamica in un piano; nell'impostazione e nella soluzione dei quali l'A. stesso ebbe gran parte.

I progressi fatti in questo campo devonsi attribuire principalmente al felice impiego, suggerito più di mezzo secolo fa da HELMOLTZ e da KIRCHHOFF, del potente strumento matematico offerto dalla teoria delle funzioni analitiche. Perciò di questa dà l'A. in un primo capitolo i teoremi essenziali, e fa uno studio particolareggiato delle rappresentazioni conformi che dovrà poi applicare.

Nel capitolo II deduce l'equazione del moto permanente e irrotazionale d'un fluido in un piano; ne caratterizza gli elementi essenziali e mostra come la teoria delle funzioni analitiche sia lo strumento necessario per intraprenderne con fecondità lo studio. Indi classifica i problemi molto opportunamente in ordine di complessità: correnti libere fra peli liberi (linee di flusso); correnti libere fra pareti rigide; correnti libere limitate in parte da peli liberi e in parte da pareti rigide.

Le prime correnti ora accennate formano l'argomento del III capitolo. Dimostrato che un'unica corrente libera di cotesto tipo non può sussistere se non ha forma circolare o rettilinea, l'A. passa al problema delle correnti confluenti, ch'Egli stesso esaminò nel 1914 in due pregevoli Memorie. La rappresentazione conforme del campo delle correnti sull'area d'un cerchio gli permette di assegnare l'integrale generale dei moti in discorso, di determinare l'equazioni parametriche dei peli liberi e infine l'ubicazione dello spartiacque (punto d'incontro di due speciali linee di corrente). Mostra la molteplicità delle soluzioni e dà il modo di caratterizzare quella che sembra corrispondere al regime più probabile.

L' A. estende poi l' analisi precedente al caso della confluenza di un numero qualunque di vene, anche con regioni spartiacque; problema che fu studiato anche dal CALDONAZZO. Qui ha successo la rappresentazione del campo in una corona circolare. ,

Il capitolo IV è dedicato al moto uniforme di un solido in un liquido indefinito, e in particolare ai casi più interessanti dei profili poligonali con punti rientranti o salienti; alla corrente di un canale che investe un solido fisso; alla derivazione dei canali; e infine all' efflusso del liquido da un recipiente forato sul fondo o lateralmente. Tutto ciò è esposto con ricchezza di particolari, talchè riesce chiaro ed istruttivo.

La seconda parte dell' opera (Vol. II) si apre con l' esposizione della *Teoria della scia* dovuta al LEVY-CIVITA; si nota ai cultori dell' idrodinamica, che non occorre di ricordarla qui. L' A. vi aggiunge le fondamentali osservazioni di BRILLOUIN e di VILLAT, e illustra tutta la teoria con varie applicazioni a particolari profili. Poi tratta la corrente di un canale dipartita da un ostacolo; problema che l' A. stesso pose e risolse nel 1909, e che fu in seguito studiato anche dal VILLAT.

Benchè l' analisi diventi qui piuttosto complicata, l' A. sa presentarla con molta chiarezza ed eleganza. Particolare interesse fisico presenta il calcolo delle resistenze dell' ostacolo e delle sponde, dal quale son dedotti risultati semplici ed espressivi.

Il caso dei profili simmetrici ha speciale importanza per le applicazioni. L' A. mostra come per questi il problema della corrente che investe (con scia) un profilo rigido si riduca al problema più semplice delle vene fluenti. A queste è dedicato tutto il sesto capitolo dell' opera. Numerosi sono i problemi particolari che tratta, fra i quali parecchi presentano un vero interesse pratico: efflusso da un recipiente a pareti poligonali con lati rettilinei o curvilinei; vena libera biforcata da un ostacolo e azioni dinamiche su questo; urto di una vena contro una parete indefinita, ecc.; ma non è possibile parlarne qui partitamente.

Chiude il volume un capitolo sull' efflusso fra pareti interrotte, e sulla fusione e sulla bipartizione di vene forzate, dove sono raccolte e ben coordinate tutte le ricerche fatte in proposito da COLONNETTI, da BOGGIO, da CALDONAZZO, da VALCOVICI, da THIERY, da VILLAT e dall' A. stesso.

Questo libro riuscirà istruttivo ai matematici, i quali vedranno con quanta efficacia ed eleganza possa essere adoperata la teoria delle funzioni analitiche nei più svariati problemi dell' idrodinamica, e servirà loro di modello per usufruirne in altri campi; ma sarà anche molto utile agli idraulici, che troveranno

qui parecchi risultati immediatamente utilizzabili nella pratica, e una sicura guida per orientarsi in mezzo alla complessità dei loro problemi. p. b.

Questions de mécanique classique et relativista, di T. LEVI-CIVITA.
(Institut d'estudis catalans, Palau de la Diputació, Barcellona. — 151 pagine).

Sono quattro conferenze tenute dall'A. a Madrid e a Barcellona ⁽¹⁾ nel gennaio del 1921, e stampate (in lingua catalana), a cura dell'Istituto di Studi Catalani ⁽²⁾. Gli argomenti che vi sono trattati appartengono a svariati campi della Meccanica e della Geometria Differenziale. I risultati esposti, per la massima parte dovuti allo stesso A., non sono mai aridamente elencati: quasi sempre sono accompagnati da almeno un cenno di dimostrazione, e opportunamente commentati, in modo da chiarirne lo spirito e la portata. La lettura riesce facile ed interessante per chiunque possenga i fondamenti della Meccanica classica.

1. *Regolarizzazione del problema dei tre corpi, e sua portata.*

È noto come le equazioni differenziali del problema dei tre corpi, in una qualunque delle loro forme classiche, presentino singolarità nei secondi membri quando una, o tutte e tre le distanze mutue dei tre corpi tendano ad annullarsi. Della *regolarizzazione* di tali equazioni, (stabilita una prima volta dal THIELE nel 1895 per il problema ristretto, e nel 1912 dal SUNDMAN per il caso generale), si è occupato il LEVI-CIVITA in molti importanti lavori ⁽³⁾, ottenendo in ciascuno dei casi, con procedimenti ori-

⁽¹⁾ V. la notizia in « Esercitazioni Matematiche », anno I, 1921, p. 92.

⁽²⁾ La traduzione catalana è dovuta al prof. E. TERRADAS, che ha anche curato, con molta signorilità, l'edizione. Quanto prima le stesse conferenze verranno pubblicate nell'originale italiano, nella collezione delle « Attualità Scientifiche » (Zanichelli).

⁽³⁾ Vedi, per il problema ristretto: *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*. (Ann. di Mat., s. 3, t. 9, 1903, pp. 1-32), e *Sur la résolution quantitative du problème des trois corps*, (Acta Math., t. 30, 1906, pp. 305-327): per il problema piano generale: *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, (Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXIV, 2° sem. 1915, pp. 61-75); *Forma mista di equazioni del moto che convengono ad una particolare categoria di sistemi meccanici*, (ibid., pp. 235-248); *Sul problema piano dei tre corpi*, (ibid., pp. 421-433, 485-501, 553-569); per il problema nello spazio, *Sopra due trasformazioni canoniche desunte dal moto parabolico*, (ibid., vol. XXV, 1° sem. 1916, pp. 445-458), e *Sur la régularisation du problème des trois corps*, (Acta Math., t. 42, 1918, pp. 99-143, e Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, t. 162, 1916, pp. 625-628).

ginali ed espressivi, la regolarizzazione richiesta. Sono i più cospicui risultati delle sue ultime ricerche su tale argomento, (rivolte al problema generale nel piano e nello spazio), che l'A. espone qui concisamente, dopo alcune considerazioni analitiche di indole generale, e una interessante introduzione di carattere storico.

Sia pel caso del problema piano, sia pel problema generale nello spazio, la regolarizzazione si ottiene in due tempi. Alle equazioni del moto, che si suppongono scritte sotto la forma canonica, vengono successivamente applicate due trasformazioni. La prima è quella che l'A. stesso chiama ⁽¹⁾ una *trasformazione* di DARBOUX-SUNDMAN, e consiste in un mutamento della variabile indipendente t (tempo) e insieme della funzione caratteristica (energia totale) del sistema. La seconda è una *trasformazione* (di contatto) *canonica* sulle coordinate (x, p) , che servono a definire, ad ogni istante, posizione e stato di movimento. In ciascuno dei due passaggi la forma canonica delle equazioni viene conservata.

La regolarizzazione permette di ottenere, col prolungamento analitico, in ogni caso le espressioni delle nuove variabili (ξ, π) sostituite ad (x, p) , e del tempo t in funzione di un nuovo parametro, e questo anche se vi sono urti. Ottenuta la regolarizzazione, si presentano anzitutto i problemi della *previsione degli urti*, e dello studio delle *traiettorie singolari*, lungo le quali si ha urto: problemi a cui, dopo i primi tentativi del PAINLEVÉ, si sono volte con successo le ricerche del SUNDMAN, del LEVI-CIVITA ⁽²⁾, del BISCONCINI. Ma anche superato questo secondo punto, non si può ritenere del tutto risolto il problema dei tre corpi; infatti ciò che più interesserebbe, nell'applicazione ai problemi pratici dell'Astronomia, sarebbe la *previsione degli urti a lunga distanza*, e su questo punto, pur limitandoci alla considerazione del problema ristretto, ben poco finora s'è ottenuto. La *sicurezza asintotica* di non giungere ad urti si ha finora, in teoria, soltanto per le *soluzioni periodiche*; pur non essendo escluso che, mediante opportune limitazioni imposte ai dati iniziali, si possa ottenerla anche per altre classi di soluzioni del problema. Ma uno dei passi più essenziali è stato compiuto con la regolarizzazione delle equazioni, a cui la risoluzione delle questioni ora accennate era subordinata, e che ad ogni modo era una preparazione indispensabile per comprendere l'essenza intima del problema ⁽³⁾.

⁽¹⁾ V. la penultima delle note ora citate, *Sopra due trasformazioni...*, pag. 448.

⁽²⁾ Prime due note citate.

⁽³⁾ Pag. 31.

2. *Le onde nei liquidi, propagazione nei canali.*

In questa seconda conferenza l'A. espone, con notevoli aggiunte e perfezionamenti, i risultati di alcune sue interessanti ricerche sui *moti ondosi progressivi di tipo permanente* ⁽¹⁾. Si tratta, come è noto, dei movimenti di un liquido perfetto, sottoposto alla sola azione delle forze di gravità, in un canale, (a fondo orizzontale, a pareti verticali e parallele), nella ipotesi che il profilo superiore (pelo libero) si sposti rigidamente, con velocità costante c , lungo il canale. Il moto si può studiare in un campo L a due dimensioni, costituito da una qualunque sezione longitudinale del canale.

Stabilito un sistema d'assi *Oxy* solidale col pelo libero l , le incognite del problema (le componenti u, v , della velocità (relativa) del punto (x, y) generico all'istante generico) debbono soddisfare a *condizioni cinematiche*, (incompressibilità, condizioni al fondo e al pelo libero l), e *dinamiche* (equazioni indefinite della idrodinamica, pressione costante al pelo libero). Oltre a ciò, per caratterizzare il movimento, detta $V_a = \sqrt{(u-c)^2 + v^2}$ la velocità assoluta della particella generica, e posto $\beta = \frac{V_a}{c}$, si aggiunge la condizione che sia $\limsup \beta < 1$ (*caratteristica cinematica*), e la condizione dell'assenza di trasporto negli strati profondi (*caratteristica di massa*).

Come è noto, l'unica soluzione rigorosa finora conosciuta è data dalle *onde trocoidali di GERSTNER*, di tipo permanente, e per le quali il trasporto di materia è nullo. Però esse presuppongono infinitamente grande la profondità del canale, e inoltre presentano lo svantaggio, che il moto delle singole particelle di fluido vi è vorticoso, mentre i movimenti generati in un fluido da forze conservative sono necessariamente irrotazionali.

Le soluzioni approssimate trovate da AIRY (onde semplici a profilo sinusoidale) e da SCOTT-RUSSEL (onda solitaria), riuniscono i due requisiti: irrotazionalità del moto e assenza di trasporto. Ma spingendo più oltre l'approssimazione STOKES e poi Lord RAYLEIGH hanno trovato che in un moto ondoso irrotazionale vi è necessariamente trasporto di materia. Il LEVI-CIVITA ha stabilito rigorosamente, pei moti ondosi irrotazionali permanenti, questa e molte altre notevoli proprietà, ed ha assegnato una equazione del tipo misto (differenziale e alle differenze

⁽¹⁾ *Sulle onde progressive di tipo permanente*, (Rend. Accad. dei Lincei, vol. XVI, 2° sem. 1907, pp. 776-790), e *Sulle onde di canale*, (ibid., vol. XXI, 1° sem. 1912, pp. 3-14).

finite), caratteristica di tali moti, e in cui si compendia il loro studio.

Le condizioni di incompressibilità e irrotazionalità si traducono nell'esistenza di due funzioni armoniche associate, φ (*potenziale di velocità*) e ψ (*funzione di corrente*) tali che $d\varphi = udx + vdy$, $d\psi = -vdx + udy$. La funzione ψ , come u e v , risulta regolare e finita anche all'infinito, e indipendente da t , onde segue che il moto ha carattere stazionario rispetto ad un osservatore solidale con gli assi mobili (x, y) . Posto $x + iy = z$, $\varphi + i\psi = f$, $u - iv = w$, si ha $df = wdz$: risulta così definita, tra il campo L del piano (z) e una striscia S del piano (f) una corrispondenza biunivoca e conforme, di cui l'A. si vale per assumere — nella ricerca della funzione $w(z)$, che è scopo del problema — come variabile indipendente la f anziché la z .

Dopo avere stabilito una notevole espressione del *flusso totale* (da cui si scorge chiaramente la *presenza di un trasporto superficiale*, che soltanto in prima approssimazione — considerando come trascurabili le potenze superiori alla 1^a di $\beta = \frac{V_a}{c}$ — può ritenersi nullo), e alcuni altri interessanti risultati, l'A. viene alle *condizioni dinamiche* per l'incognita $w(f)$. Nel caso attuale le equazioni indefinite della idrodinamica si riducono a una sola, l'*equazione di D. BERNOULLI*, che — detta g l'accelerazione di gravità — si scrive:

$$\frac{1}{2} V^2 + g(y - h) + p = \text{cost.}$$

Questa equazione nei punti della massa liquida serve a definire la pressione p : nei punti della superficie libera invece dà una condizione ai limiti caratteristica, che con semplici trasformazioni può ridursi alla forma

$$(1) \quad \frac{d}{df} [w(f + iq)w(f - iq)] - ig \left(\frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)} \right) = 0.$$

Questa è l'equazione mista già accennata, che sintetizza il problema. Nel caso particolare di *onde periodiche* ($w(z)$ periodica, con periodo reale $\lambda =$ lunghezza d'onda), posto $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z}$ ed $\varepsilon = \frac{w - c}{c}$, (onde $\beta = |\varepsilon|$), in prima approssimazione (trascurando le potenze di ε superiori alla prima), dalla (1) si ottiene una equazione di tipo analogo in $\varepsilon(\zeta)$, ma *lineare*: e per questa è facile stabilire soluzioni particolari, ritrovando così la nota equazione

di AIRY e molti altri interessanti-risultati relativi alle onde semplici sinusoidali.

La soluzione generale del problema proposto — delle onde irrotazionali permanenti — non si conosce ancora: neppure nel caso delle onde periodiche finora si è potuto stabilire un teorema generale d'esistenza e quindi un algoritmo costruttivo di soluzioni rigorose della equazione (1): ma intanto è già molto aver potuto ricondurre il problema allo studio di questa unica equazione ⁽¹⁾, e alla ricerca delle soluzioni di essa che soddisfano a certe condizioni perfettamente determinate (vedi n. 9, pag. 61).

(continua)

Dott. ENEA BORTOLOTTI

FR. KADERAVEK: *Perspektiva, (Prospettiva. Manuale per i pittori, gli architetti e gli artisti. J. Stene, Praga, 1922, pag. 109, XXXI tavole).*

Il dott. ing. FRANCESCO KADERAVEK, che insegna geometria proiettiva e descrittiva nell'Istituto Tecnico Superiore ceco a Praga, è non solo buon geometra, ma distinto cultore della storia delle due scienze, e, nel suo libro, dimostra di conoscere in modo particolare la prospettiva italiana; e di averla direttamente studiata sulle opere degli architetti e degli artisti oltre che sui trattati e sui manuali di storia dell'arte.

Il prof. KADERAVEK segue nel suo libro il successivo sviluppo della prospettiva, dalle arcaiche manifestazioni d'arte primitiva, alle produzioni dei maestri del Barocco.

In tale esposizione si fa la debita parte all'arte ed alla scienza ceca, non abbastanza conosciuta in Italia. Il libro è ornato da tavole illustrative, e da 96 riproduzioni artistiche.

Dott. Q. VETTER

(¹) Di cui CISOTTI ha dato notevoli generalizzazioni.