

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UMI

## Recensioni

- \* Tullio Levi-Civita: Questions de mètànica classica i relativista
- \* Gaspard Monge: Geometrie descriptive
- \* Pierre de Fermat: Introduzione ai luoghi piani e solidi
- \* Archimedes: Sfera e cilindro

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. 2 (1923), n.3, p. 108–114.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_3_108_0)  
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1923\\_1\\_2\\_3\\_108\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_3_108_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## RECENSIONI

*Questions de mécanique classique i relativista*, di T. LEVI-CIVITA.  
(Institut d'estudis catalans, Barcelona) (1).

### 3. *Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque.*

Argomento di questa conferenza è la nozione di *parallelismo in una varietà qualunque*, (introdotta dallo stesso A. in una memoria pubblicata nel 1917 (2), e le relazioni tra il parallelismo e la curvatura nel senso di RIEMANN.

I principali risultati da Lui stesso stabiliti nel lavoro ora citato, opportunamente integrati con alcuni risultati ottenuti poi da altri studiosi (in particolare il SEVERI (3) e il PÉRÈS (4)), proseguendo le ricerche nella via da lui tracciata, vengono esposti in modo assai semplice e in parte nuovo, e resi accessibili anche a chi non abbia famigliari i principi e i metodi della geometria degli spazi a più dimensioni.

L'introduzione della nuova nozione di parallelismo è fatta prima per le ordinarie superficie, e poi per una qualunque  $V_n$ . Su di una superficie  $\sigma$  il parallelismo viene definito in modo nuovo e semplicissimo (non estendibile però ad una qualunque  $V_n$ ). Se la  $\sigma$  è sviluppabile, diciamo che due versori tangenziali  $u, u_1$ , (appartenenti ai piani tangenti in  $P, P_1$ ), sono paralleli (in senso superficiale) su  $\sigma$ , quando essi risultano tali nel senso euclideo, dopo lo sviluppo di  $\sigma$  in un piano. Se invece  $\sigma$  non è sviluppabile, diciamo che  $u_1$  è dedotto da  $u$  per *parallelismo* (su  $\sigma$ ) *lungo una determinata curva di trasporto*  $PP_1$ , tracciata su  $\sigma$ , se essi sono paralleli, nel senso ora detto, sulla sviluppabile circoscritta a  $\sigma$  lungo la curva  $PP_1$ .

(1) Continuazione, v. pag. 72.

(2) LEVI-CIVITA, *Nozioni di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*. (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. XLII, (1917), pp. 173-204).

(3) SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà* (ibid., pp. 227-259).

(4) J. PÉRÈS, *Le parallelisme de M. Levi-Civita et la courbure riemannienne*. (Rend. Accad. dei Lincei, t. XXVIII, 1° sem. 1919, pp. 425-428).

Passando dai versori ai vettori di modulo qualunque, diciamo *equipollenti* (in senso superficiale) due vettori (tangenziali) paralleli e di egual modulo.

Dalla definizione seguono subito due proprietà fondamentali l'*invarianza dell'angolo di due direzioni* nel trasporto per parallelismo e l'*autoparallelismo delle geodetiche*, che estende alle geodetiche su di una superficie qualunque la proprietà intuitiva della retta, espressa dalla nota definizione euclidea.

Nel caso di un *trasporto infinitesimale* ( $PP_1$  infinitesimo), e posto  $u_1 = u + du$ , per mezzo di semplici considerazioni cinematiche è stabilita la forma differenziale della legge di parallelismo,

$$(1) \quad \tau \times du = 0,$$

ove  $\tau$  è un versore qualunque del piano tangente in  $P$ . Nella (1) si può sostituire a  $\tau$  uno *spostamento virtuale*  $\delta P$  del punto  $P$  su  $b$ : e introducendo un sistema di coordinate cartesiane, posto  $P \equiv (y_1, y_2, y_3)$  e detti  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  i coseni direttori di  $u$ , abbiamo infine l'equazione simbolica

$$(2) \quad \sum_1^3 \alpha_i \delta y_i = 0,$$

che traduce l'altra definizione geometrica, data, per il parallelismo, dall' A. nella citata Memoria, ed estendibile ad una varietà qualunque.

Il *carattere intrinseco* della nozione di parallelismo superficiale si stabilisce facilmente, sia per via sintetica che per mezzo di sviluppi analitici, che conducono a porre le *equazioni differenziali del parallelismo* sotto la forma definitiva

$$(3) \quad du^{(i)} + \sum_j^2 \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\} u^{(j)} dx_j = 0, \quad (i = 1, 2)$$

ove le  $x$  sono coordinate curvilinee su  $\sigma$ , e le  $u^{(i)}$  i parametri direttori, o costanti direttive, su  $\sigma$ , del versore  $u$ .

Una forma analoga alla (3) si può dare per le equazioni che definiscono il trasporto per equipollenza di un vettore tangenziale qualunque: dalle quali, nel caso di vettori infinitesimi, si deduce una notevole conseguenza: *per la composizione di vettori infinitesimali sulla superficie, vale la regola del parallelogrammo*. Precisamente: se  $P_1$  e  $P_2$  sono punti di  $\sigma$  infinitamente vicini a  $P$ , posto  $PP_1 = dP$ ,  $PP_2 = \delta P$ , il punto che si ottiene aggiungendo a  $P_1$  il vettore equipollente a  $\delta P$ , coincide col punto che si ottiene aggiungendo a  $P_2$  il vettore equipollente a  $dP$ .

Passando alla considerazione di una qualunque  $V_n$ , immersa in un  $S_N$  euclideo, dopo alcune considerazioni preliminari l'A. stabilisce, anche in questo caso generale, (partendo dalla definizione geometrica espressa dalla (2)), le equazioni differenziali del parallelismo, dello stesso tipo (3): indi accertna brevemente alle principali proprietà.

Molto semplicemente viene dimostrata (n. 10: *teorema di SEVERI*) la equivalenza, nel caso di trasporto infinitesimo, della definizione di parallelismo data dall'A. con quella che ha dato il SEVERI (l. c. pag. 254) ricorrendo alla considerazione della superficie geodetica che ha centro nel punto generico  $P$  di  $V_n$ , e contiene le geodetiche di  $V_n$  uscenti da  $P$  con le direzioni di  $PP_1$  e di  $u$ .

Infine viene stabilita la relazione che lega il concetto di parallelismo in una  $V_n$  con quello di *curvatura riemanniana*. Ai metodi seguiti dall'A. stesso nel lavoro più volte citato, e poi dal SEVERI, viene sostituito (salvo modificazioni negli sviluppi) un procedimento dovuto a PÉRÈS (l. c.), basato sulla considerazione della *deviazione* che subisce una direzione ( $u$ ) di  $V_n$  *per trasporto* (per parallelismo su  $V_n$ ), *lungo un circuito chiuso infinitesimo* <sup>(1)</sup>.

Trovate le espressioni degli incrementi  $\Delta u^{(\alpha)}$  dei parametri direttori in un tale trasporto, ne consegue una notevole *formula di PÉRÈS*, dalla quale, nel caso di una ordinaria superficie, si deduce che — detto  $\Delta x$  l'incremento subito dall'angolo di due direzioni ( $u, v$ ), tangenziali a  $\sigma$  in  $P$ , nel trasporto per parallelismo di  $u$  lungo un circuito chiuso infinitesimo  $T$  tracciato per  $P$  su  $\sigma$ , e  $\Delta \sigma$  l'area racchiusa da  $T$ , — il rapporto  $-\frac{\Delta x}{\Delta \sigma}$  dà precisamente la *curvatura totale* (di GAUSS) di  $\sigma$  in  $P$ . Nel caso di una qualunque  $V_n$ , tenendo conto del teorema del SEVERI si trova che lo stesso rapporto  $-\frac{\Delta x}{\Delta \sigma}$ , calcolato sulla superficie geodetica, di centro  $P$ , individuata dalla giacitura (orientazione superficiale) che contiene le direzioni ( $u$ ) e ( $v$ ), dà la *curvatura riemanniana* di  $V_n$  secondo tale orientazione.

#### 4. *L'ottica geometrica, e la relatività generale di Einstein.*

Lo scopo di quest'ultima conferenza — che riproduce una nota pubblicata, con lo stesso titolo, dall'A. nel 1920 <sup>(2)</sup> — è di

<sup>(1)</sup> Considerazione di cui si è valso proficuamente il BOMPIANI in alcuni suoi notevoli lavori.

<sup>(2)</sup> Nella « Rivista d'ottica e meccanica di precisione », anno 1°, (1920), n. 11-12, pp. 187-200.

condurre il lettore a rendersi ragione di una delle più notevoli prove sperimentali della teoria di EINSTEIN: la *deflessione* dei raggi luminosi provenienti dalle stelle, per l'azione del campo gravitazionale del sole.

Il lavoro consta di tre parti. Nella prima (*Richiami di ottica geometrica secondo lo schema classico*), l'A. anzitutto ricorda come si giunga a riassumere l'ottica geometrica di un mezzo in cui l'indice di rifrazione  $n(xyz)$  vari con continuità da punto a punto, nell'unica formula variazionale

$$\delta \int n ds = 0,$$

a cui dà luogo il noto principio di FERMAT (del tempo minimo).

Il paragone di questa formula con quella che esprime il *principio della minima azione*

$$\delta \int v ds = 0,$$

permette di enunciare un notevole principio di equivalenza: *i raggi luminosi in un mezzo di indice  $n(xyz)$  costituiscono altrettante traiettorie dinamiche, di un punto materiale soggetto ad una forza derivata dal potenziale  $\frac{1}{2}n^2$ .*

Parte II. *Energia e materia come aspetti diversi di una stessa entità fisica.* — Lo studio dei fenomeni radioattivi e, per altra via, la relatività in senso ristretto, hanno condotto a riconoscere una equivalenza tra energia e materia, che si precisa nel *principio di proporzionalità  $E = mc^2$* , (ove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto). Se questo principio si aggiunge alle ipotesi della meccanica classica, si ha subito come conseguenza necessaria l'*incurvamento dei raggi di un campo di forza*. Nel caso particolare del campo gravitazionale del sistema solare, il problema delle traiettorie luminose viene riportato al problema dei due corpi: essendo positiva l'energia totale, le *traiettorie sono iperboli col fuoco nel sole*. Detto  $\delta$  l'angolo degli asintoti, si trova che il massimo valore di  $\delta$  — che dà anche la misura della *deflessione* del raggio luminoso — è approssimativamente  $\delta = 0',88$ , pei raggi che rasentano la superficie del sole.

Parte III. *La relatività generale e le sue conseguenze concrete circa l'andamento dei raggi in un campo di forza.* — Mirando soltanto « a far intendere lo spirito del risultato finale e della sua

deduzione quantitativa », l'A. tralascia gli sviluppi di calcolo <sup>(1)</sup> e si limita ad enunciare il risultato a cui conducono, in prima approssimazione, le ipotesi della relatività generale, applicate allo studio delle traiettorie luminose in un campo di forza: e a mostrare come ne segua in particolare, pei raggi stellari che passano rasente alla superficie del sole, una deflessione  $\delta = 1'', 76$ , doppia di quella a cui conduce l'aggiunta del principio di proporzionalità alle ipotesi della meccanica classica, e assai più di essa (e a maggior ragione, più della deflessione nulla della meccanica classica), vicina ai dati sperimentali ottenuti durante la nota eclisse del 1919.

Dott. ENEA BORTOLOTTI

La *Collection des Maîtres de la Pensée Scientifique*, ha riprodotto in due nitidi volumi in-16 (144 e 138 pagine) la *Géométrie descriptive* par GASPARD MONGE, *augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective*.

Questo Trattato — l'opera più conosciuta di MONGE — fu composto ad uso degli scolari della prima *École Normale*, creata con legge 9 brumaio a. III (30 ottobre 1794).

Tale scuola, che non durò che per i primi quattro mesi dell'anno 1795, ed era destinata « à régénérer l'instruction publique, « anéantie en France sous le règne de la terreur », aveva 1500 allievi, e fra gli insegnanti: LAGRANGE e LAPLACE per le Matematiche, MONGE per la Geometria descrittiva, BERTHOLLET per la Chimica.

Professori-aggiunti, per la Descrittiva, furono LACROIX ed HACHETTE.

Nel Programma, che precede lo svolgimento di queste Lezioni, dopo aver dimostrata l'utilità dello studio della Geometria descrittiva per la educazione dello spirito, MONGE insiste sull'indirizzo pratico che egli intende che ad esso sia dato: « Elle est (la descrittiva) indispensable à tous les ouvriers dont le but est de « donner aux corps certaines formes déterminées; et c'est principalement parceque les méthodes de cet art ont été jusqu'ici

(<sup>1</sup>) Pei quali l'A. stesso ha posto le basi in una serie di notevolissimi lavori sulla *Statica einsteiniana*, usciti dal 1917 al 1919 nei Rend. della R. Accad. dei Lincei. Ivi l'A. si occupa anche, in particolare, del problema specifico delle traiettorie luminose: come pure nella nota *La teoria di Einstein e il principio di Fermat*, pubblicata nel « Nuovo Cimento », (vol. 16, serie 6<sup>a</sup>, 1° sem. 1918, pp. 105-114).

« trop peu répandues, ou même presque entièrement négligées, « que les progrès de notre industrie ont été si lents.

« Mais comme nous n'avons sur cet art aucun ouvrage élémentaire bien fait, soit parceque jusqu'ici les savans y ont mis « trop peu d'intérêt, soit parce qu'il n'a été pratiqué que d'une « manière obscure... un cours simplement oral serait absolument « sans effet ».

L'opera di MONGE, che riassume e coordina, sotto un punto di vista generale, tutto ciò che in questa materia era stato ritrovato da scienziati, da architetti, da artisti, a partire dal primo rinascimento italiano nel secolo XV, eccelle per novità, genialità e chiarezza di esposizione, ed è l'opera fondamentale con la quale si inizia la Geometria descrittiva moderna. *et. b.*

PIERRE DE FERMAT (1636): *Introduzione ai luoghi piani e solidi.*

Traduzione (tedesca) dal latino di H. WIELEITNER.

*Luoghi piani*, secondo gli antichi, sono le *rette ed i cerchi*; *luoghi solidi* le *sezioni coniche*. In questa introduzione FERMAT, contemporaneamente al CARTESIO, e con maggior precisione di forma, espone i principî che regolano la applicazione dell'Algebra allo studio delle curve algebriche.

Si tratta dunque veramente di un'opera classica nel campo della Geometria Analitica.

Il traduttore ha aggiunto una breve ma perspicua introduzione storica, ed ha arricchito l'opera con dotti commenti.

L'edizione, nitida ed accuratissima, è tratta dalla lezione latina data a cura del TANNERY nel vol. I delle Opere di FERMAT. *et. b.*

**Ottica Fisica.** — OSTWALD ha pubblicato recentemente a Leipzig per la sua collezione dei classici delle scienze esatte, due interessanti libretti. Il primo sull'interferenza dei raggi Roentgen è edito per cura dei mineraloghi RINNE e SCHIEBOLD dell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Leipzig e contiene le Memorie di MAX VON LAUE, riferentisi alla scoperta di questi di quella interferenza, che costituisce il ponte gittato tra Fisica e Cristallografia, apportatore di nuova luce dall'una all'altra sponda.

Il secondo libretto è la traduzione in tedesco del testo latino di ERASMO BARTOLINO danese, apparso a Copenaghen nell'anno 1669, in cui il BARTOLINO riferisce intorno ad esperienze da lui eseguite sul cristallo Islandico, illustranti un nuovo tipo di rifra-

zione. Nel semplice resoconto si ammira l'acutezza di osservazione, che guidò l'Autore alla scoperta del fenomeno della doppia rifrazione; questo, ed i fenomeni della stessa epoca degli anelli di NEWTON e della diffrazione di GRIMALDI, sono le pietre miliari, da cui trasse il suo mirabile sviluppo la teoria ondulatoria della luce. d. u.

ARCHIMEDES: *Sfera e cilindro*. Traduzione (tedesca) e note del dott.

A. CZWALINA-ALLENSTEIN. — N. 202 della « Ostwald's Klassiker ecc. », Lipsia, 1922.

È in questo libro sulla sfera e il cilindro che ARCHIMEDE espone la sua teoria pel calcolo delle superfici e dei volumi della sfera, dei segmenti e dei settori sferici: considerando i solidi generati dalla rotazione, intorno ad un loro asse di simmetria, di poligoni regolari, o di parte di questi, inscritti e circoscritti ai corpi di cui vuole calcolare il volume o la superficie, giunge, attraverso il processo d'esaustione, ai noti brillanti risultati. Non a torto ARCHIMEDE stesso giudicava questa opera come il migliore frutto del suo ingegno: essa veniva a formare un complemento necessario ed importante agli elementi di EUCLIDE, superando difficoltà ritenute insormontabili.

Nella traduzione tedesca di tale opera classica che oggi ci si offre, si è seguita la ottima edizione critica dell' HEIBERG, e il traduttore ha assolto il suo compito, aggiungendo, là dove il testo lo richiedeva, ottime note esplicative. a. a.