Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Costantin Carathéodory

Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.3, p. 81–87.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_3_81_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

PICCOLE NOTE

Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio.

Nota di Costantin Carathéodory [1]

16. Consideriamo la funzione

$$F(x, y, x', y') = e^{x} \sqrt{x'^{2} + y'^{2}}, \tag{8}$$

o, scegliendo la x come variabile indipendente,

$$f(x, y, y') = e^{x} \sqrt{1 + y'^{2}}. \tag{9}$$

La figurativa del problema del calcolo delle variazioni, corrispondente alla funzione (8), è un cerchio; il problema è dunque regolare in tutto il piano.

Siccome la funzione F è semplicemente moltiplicata per una costante, quando si trasporta il piano (x, y) parallelamente a sè stesso, con una traslazione qualunque, i fasci delle estremali passanti per un punto sono tutti congruenti e omotetici.

17. Ciò è mostrato anche dal calcolo. Poichè, infatti, la f è indipendente da y, le estremali hanno per equazione $f_{y'} =$ cost., vale a dire:

$$\frac{e^{x} y'}{\sqrt{1 + y'^{2}}} = c. \tag{10}$$

Per $c = 0$, si ha $y' = 0$, ossia, integrando,

$$y - y_0 = 0. \tag{11}$$

Per $c \neq 0$, si può porre $c = \pm e^{x_0}$, secondo il segno di y', e si ha;

[1] Continuazione, v. pag. 48.

in luogo della (10),

$$y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{e^{2(x-x_0)}-1}}. \tag{12}$$

L'integrale generale di questa equazione si scrive, senza ambiguità di segno,

$$e^{x-x_0}\cos(y-y_0)=1, \tag{13}$$

e le equazioni (11) e (13) dimostrano la nostra affermazione.

18. Per avere l'integrale generale delle nostre estremali, vale a dire, una sola espressione per le curve rappresentate dalle due equazioni (11) e (13), poniamo

$$e^{-x_0}\cos y_0 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad e^{-x_0}\operatorname{sen} y_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \tag{14}$$

L'equazione (13) prende allora la forma

$$\alpha\cos y + \beta\operatorname{sen} y = \gamma e^{-x}, \tag{15}$$

la quale, per $\gamma = 0$, è equivalente alla (11).

L'equazione (15) ci mostra che esiste al più un'estremale del nostro problema congiungente due punti qualunque del piano. Ed infatti, se si scrive che una curva rappresentata dalla (15) contiene i punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2), si ha da risolvere un sistema di equazioni lineari ed omogenee in α, β, γ, e si trova la relazione

$$e^{x_1+x_2}\operatorname{sen}(y_1-y_2)+e^{x_2+x}\operatorname{sen}(y_2-y)+e^{x_1+x}\operatorname{sen}(y-y_1)=0. \tag{16}$$

19. Affinchè esista un arco continuo della curva rappresentata dalla (16), congiungente i due punti dati, è necessario che sia verificata la condizione

$$|y_1-y_2|<\pi. \tag{17}$$

Infatti, le estremali sono o delle parallele all'asse delle x oppure delle curve rappresentate dall'equazione (13). Queste ultime, che si deducono le une dalle altre con semplice traslazione, sono convesse, possiedono nel punto (x_0, y_0) un vertice, e sono comprese fra le due rette

$$y = y_0 \pm \frac{\pi}{2},$$

le quali sono, per esse, degli asintoti. Queste osservazioni possono anche servire a stabilire direttamente, per mezzo di un ragionamento geometrico del tutto elementare, le conclusioni del n.° precedente.

20. Per calcolare il vertice (x_0, y_0) della nostra curva, allorchè questa è data dall'equazione (16), con la condizione (17), ricaviamo da (15) e (16).

$$(18)\qquad \begin{gathered} \alpha = e^{x_2} \operatorname{sen} y_2 - e^{x_1} \operatorname{sen} y_1, \quad \beta = -e^{x_2} \cos y_2 + e^{x_1} \cos y_1, \\ \gamma = e^{x_1+x_2} \operatorname{sen}(y_2 - y_1), \end{gathered}$$

e dalla (14)

$$(19)\qquad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{x_0} = |\gamma| = \frac{y_2 - y_1}{|y_2 - y_1|}\gamma.$$

Ponendo dunque

$$(20)\qquad R^2 = \alpha^2 + \beta^2 = e^{2x_2} - 2e^{x_1+x_2} \cos(y_2 - y_1) + e^{2x_1}$$

abbiamo, dapprima, confrontando le ultime equazioni,

$$(21)\qquad Re^{x_0} = \frac{y_2 - y_1}{|y_2 - y_1|} e^{x_1+x_2} \operatorname{sen}(y_2 - y_1),$$

relazione che serve a calcolare x_0, e poi, dalle (14),

$$(22)\qquad R \cos y_0 = \frac{y_2 - y_1}{|y_2 - y_1|}(e^{x_2} \operatorname{sen} y_2 - e^{x_1} \operatorname{sen} y_1),$$

$$(23)\qquad R \operatorname{sen} y_0 = \frac{y_2 - y_1}{|y_2 - y_1|}(-e^{x_2} \cos y_2 + e^{x_1} \cos y_1),$$

da cui deduciamo un valore di y_0, a meno di 2π. Per determinare, infine, y_0 senza ambiguità, sceglieremo, fra le soluzioni, in numero infinito, delle due ultime equazioni, quella che soddisfa alla relazione

$$(24)\qquad |y_1 - y_0| < \pi.$$

Questa soluzione, che esiste sempre, è unica! Infatti, non vi potrebbe essere ambiguità che nel caso in cui fosse $|y_1 - y_0| = \pi$ e quindi $\cos(y_1 - y_0) = -1$. Ora, dalle equazioni (22) e (23), segue

$$(25)\qquad R \cos(y_1 - y_0) = e^{x_2} |\operatorname{sen}(y_2 - y_1)|,$$

donde risulta che $\cos(y_1 - y_0)$ è positivo e che, per conseguenza, è

$$(26)\qquad |y_1 - y_0| < \frac{\pi}{2},$$

ciò che assicura l'unicità. Siccome poi l'equazione (17) è, per ipotesi, verificata, noi deduciamo dalla (26) la relazione $|y_2 - y_0| < \frac{3\pi}{2}$, e poichè le equazioni (22) e (23) ci danno

$$R\cos(y_2 - y_0) = e^{x_1}\,|\,\mathrm{sen}\,(y_2 - y_1)\,| > 0, \tag{27}$$

abbiamo anche

$$|y_2 - y_0| < \frac{\pi}{2}, \tag{28}$$

e vediamo così che, calcolando il vertice (x_0, y_0) della nostra curva come noi abbiamo fatto, questa curva passa effettivamente per i punti scelti.

21. Ci resta da vedere se il vertice (x_0, y_0) si trova all'interno o all'esterno dell'arco di estremale congiungente i due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2). A questo scopo, deduciamo dalle equazioni (22) e (23) le relazioni seguenti:

$$R\,\mathrm{sen}\,(y_1 - y_0) = \frac{y_2 - y_1}{|y_2 - y_1|}\left(e^{x_2}\cos(y_2 - y_1) - e^{x_1}\right) \tag{29}$$

$$R\,\mathrm{sen}\,(y_2 - y_0) = \frac{y_2 - y_1}{|y_2 - y_1|}\left(e^{x_2} - e^{x_1}\cos(y_2 - y_1)\right). \tag{30}$$

Vediamo allora immediatamente che il vertice dell'estremale si trova nell'interno dell'arco considerato, se i secondi membri delle equazioni (29) e (30) hanno segni diversi, all'esterno, se questi secondi membri hanno ugual segno; e che esso coincide con una delle estremità dell'arco se una delle due espressioni indicate si annulla.

22. Calcoliamo la distanza geodetica, dal vertice, di una estremale fino ad un punto qualunque di questa curva. Troviamo, servendoci dell'equazione (12)

$$\int_{x_0}^{x} e^{x}\sqrt{1 + y'^2}\,dx = e^{x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{2(x-x_0)}\,dx}{\sqrt{e^{2(x-x_0)} - 1}} = \sqrt{e^{2x_1} - e^{2x_0}}. \tag{31}$$

La distanza geodetica $I_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}$ di due punti situati su una medesima estremale, quando si scelgano le notazioni in modo che sia $x_2 \geq x_1$, è

$$I_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} = \sqrt{e^{2x_2} - e^{2x_0}} \mp \sqrt{e^{2x_1} - e^{2x_0}}, \tag{32}$$

dove si dovrà scegliere il segno meno o il segno piu secondo che il vertice dell'estremale è posto all'esterno o all'interno dell'arco considerato. Ora si ha, usando le equazioni (20) e (21),

$$\sqrt{e^{2x_2} - e^{2x_0}} = \frac{e^{x_2}}{R} \left(e^{x_2} - e^{x_1} \cos (y_2 - y_1)\right),$$

$$\sqrt{e^{2x_1} - e^{2x_0}} = \pm \frac{e^{x_1}}{R} \left(e^{x_1} - e^{x_2} \cos (y_2 - y_1)\right),$$

dove si dovrà, per il risultato del n.° precedente, scegliere lo stesso segno che si è scelto in (32). Si ha dunque, in tutti i casi,

$$I_{x_1,\, y_1}^{x_2,\, y_2} = R = \sqrt{e^{2x_1} - 2e^{x_1+x_2} \cos (y_1 - y_2) + e^{2x_2}}, \tag{33}$$

la quale formula, per la simmetria che in essa appare, resta valida allorchè è $x_1 > x_2$, e vale, come lo si vede facilmente, anche per $y_1 = y_2$.

23. Studiamo, infine, i campi di estremali passanti per un punto. Siccome essi sono tutti congruenti e omotetici, basta considerare l'insieme delle estremali passanti per l'origine delle coordinate.

L'equazione (15) ci dà, sotto questa condizione,

$$\alpha \cos y + \beta \operatorname{sen} y = \alpha e^{-x}. \tag{34}$$

Le curve determinate da questa equazione ricoprono, in modo uniforme, la striscia compresa fra le due rette $y = \pm \pi$. Segue perciò, dal nostro teorema, che almeno una delle estremali di questo campo ha una lunghezza geodetica finita; ed effettivamente si ha che la parte negativa dell'asse delle x ha, per la formula (33), una lunghezza geodetica uguale all'unità.

24. Si ottiene l'equazione dei cerchi geodetici che tagliano ortogonalmente il fascio considerato precedentemente, uguagliando l'ultimo membro di (33) ad una costante ρ, dopo aver posto $x_1 = y_1 = 0$ e $x_2 = x$, $y_2 = y$; queste curve soddisfano dunque all'equazione:

$$e^{2x} - 2e^{x} \cos y + 1 = \rho^2. \tag{35}$$

Per $\rho < 1$ la curva (35), che si può rappresentare con l'equazione

$$e^{x} = \cos y \pm \sqrt{\rho^2 - \operatorname{sen}^2 y},$$

**

è una curva chiusa convessa, avente due assi di simmetria. Per $\rho = 1$, si ha l'equazione

$$e^x = 2 \cos y;$$

la curva è ancora convessa, ma si estende all'infinito. Per $\rho > 1$, si ha, infine,

$$e^x = \cos y + \sqrt{\rho^2 - \operatorname{sen}^2 y};$$

la curva è allora aperta e si estende dal punto $x = \log(\rho - 1)$, $y = \pi$, fino al punto $x = \log(\rho - 1)$, $y = -\pi$, passando per il punto $x = \log(\rho + 1)$, $y = 0$. Essa possiede delle tangenti verticali in questi tre punti; inoltre, essa ha due punti d'inflessione in $x = \frac{1}{2} \log(\rho^2 - 1)$, $y = \pm \frac{\pi}{2}$, che sono, nello stesso tempo, dei punti di simmetria.

25. Se si conduce per ciascun punto del piano per il quale non passa alcuna curva del nostro campo una parallela all'asse delle x, si ottiene un campo di estremali che ricopre in modo uniforme l'intero piano. Le curve che tagliano trasversalmente il nostro campo di estremali e che coincidono, nel nostro problema, con le trajettorie ortogonali del campo, hanno, in tutto il piano, una tangente continua. Si conclude, per mezzo di questa figura, e coi metodi noti del calcolo delle variazioni, che se si unisce il punto O con un punto P del piano, di coordinate x e y, mediante una curva qualunque, l'integrale

$$\int_0^P e^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

preso lungo questa curva, avrà per limite inferiore

$$\sqrt{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1}, \quad \text{se} \quad |y| < \pi, \quad \text{e} \quad e^x + 1, \quad \text{se} \quad |y| \geq \pi.$$

Questo limite è raggiunto, nel primo caso, dall'estremale del nostro campo che unisce O con P, e da questa sola curva, mentre, invece, nel secondo, ad ogni curva continua congiungente O con P corrisponde sempre un valore dell'integrale superiore a $e^x + 1$; si potrà però approssimarsi indefinitamente a questo ultimo numero scegliendo convenientemente la curva considerata.

26. Il nostro esempio mostra, in particolare, che un problema analitico di calcolo delle variazioni può essere definito positivo, regolare in tutto il piano e tale che due estremali si taglino al più in un punto, senza che il limite inferiore dell'integrale del problema, preso lungo una curva congiungente due punti, sia sempre una funzione analitica delle coordinate di questi punti.

Atene, gennaio 1923.