Bollettino
Unione Matematica
Italiana

P. Burgatti

Sulle funzioni analitiche d'ordine n e sull'equilibrio elastico in due dimensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.3, p. 87–91.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_3_87_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1923.

Sulle funzioni analitiche d'ordine n e sull'equilibrio elastico in due dimensioni.

Nota di PIETRO BURGATTI

1. Seguitando le considerazioni della mia Nota precedente (1); se si interpreta $\varphi = u + iv$ come una omografia nel piano, regolare nell'area σ, sussiste il teorema del gradiente (2)

$$\int_\sigma \operatorname{grad} \varphi d\sigma = -\int_s \varphi n ds.$$

essendo n il vettore unitario che definisce la normale al contorno (s) rivolta verso l'interno. Ora, detto a il vettore unitario che definisce l'asse delle x e P un punto del contorno, si ha (con le notazioni della Nota precedente)

$$\operatorname{grad} \varphi = (D_i \varphi) a, \quad \text{e sul contorno} \quad dz \cdot a = dP = in \cdot ds:$$

ne consegue

$$\int_\sigma D_i \varphi \cdot d\sigma = \frac{1}{i}\int_s \varphi dz.$$

Sia ζ l'affisso di un altro punto M dell'area σ. Se φ non è regolare, ma della forma $\psi : z - \zeta$, ove ψ è regolare; allora, isolando il punto ζ con una piccola circonferenza e applicando la formula precedente, si deduce in una maniera ben nota

$$\int_\sigma D_i\left(\frac{\psi}{z-\zeta}\right) d\sigma - \frac{1}{i}\int_s \frac{\psi}{z-\zeta}\, ds = 2\pi\psi(M).$$

Ma essendo

$$D_i\left(\frac{1}{z-\zeta}\right) = 0 \quad \text{e quindi} \quad D_i\left(\frac{\psi}{z-\zeta}\right) = D_i\psi,$$

risulta

$$2\pi\psi(M) = \int_\sigma \frac{D_i\psi}{z-\zeta}\, d\sigma - \frac{1}{i}\int_s \frac{\psi dz}{z-\zeta}.$$

(1) N. 1 di questo Bollettino.

(2) BURALI-FORTI e MARCOLONGO. *Analyse Vect. Gén.*, Vol. X, pag. 108.

Questa definisce la funzione $\psi = u + iv$ mediante i suoi valori al contorno e i valori di $D_i\psi$ nell'area stessa. Quando $D_i\psi$ è analitica d'ordine $n-1$ in σ, la ψ risulta analitica d'ordine n. E in particolare, se $D_i\psi$ è una funzione di z, la ψ definita da

$$2\pi\psi(M) = \int_\sigma \frac{f(z)}{z-\zeta}\, d\sigma - \frac{1}{i}\int_s \frac{\psi}{z-\zeta}\, dz$$

è analitica d'ordine 2.

2. La formula precedente è del tipo di quelle di Green. Se ne può trovare una del tipo di quelle di Cauchy. Limitiamoci per brevità alle funzioni analitiche d'ordine 2.

Indichiamo con $(D_i\varphi_2)_s$ il valore di $D_i\varphi_2$ sul contorno (s), essendo φ_2 una funzione analitica d'ordine 2, e perciò $D_i\varphi_2$ una funzione di z. Per un noto teorema di Cauchy avremo

$$D_i\varphi_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{(D_i\varphi_2)_s}{\xi - z}\, d\xi,$$

ove ξ è l'affisso d'un punto del contorno. Sia $(\varphi_2)_s$ il valore di φ_2 al contorno. Essendo (vedi pag. 12, *Bollettino* n. 1)

$$\varphi_2 = \frac{z_1}{2} D_i(\varphi_2) + \psi(z),$$

i valori di $\psi(z)$ al contorno saranno

$$(\varphi_2)_s - \frac{\xi_1}{2}(D_i\varphi_2)_s,$$

e perciò i suoi valori in σ si otterranno dalle formule di Cauchy

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{(\varphi_2)_s - \frac{1}{2}\xi_1(D_i\varphi_2)_s}{\xi - z}\, d\xi.$$

Ne consegue da tutto questo

$$\varphi_2 = \frac{z_1}{2\pi i}\int_s \frac{(D_i\varphi_2)_s}{\xi - z}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{(\varphi_2)_s}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{4\pi i}\int_s \frac{\xi_1(D_i\varphi_2)_s}{\xi - z}\, d\xi;$$

che è la generalizzazione della formula di Cauchy [1].

[1] Bisogna notare che per mettere in evidenza i *dati* veramente necessari e sufficienti per l'esistenza delle funzioni considerate nei teoremi suddetti e in quelli del n. 5 della Nota precedente, occorre un più maturo

3. Nel corso di questo stadio m'è venuto sott'occhio una *Memoria* del BELTRAMI, che non conoscevo: « Sulle funzioni complesse » (Opere, Vol. IV, pag. 245) (e mi pare sia stata dimenticata, ed a torto, anche dagli analisti); nella quale ho trovato considerazioni che si riattaccano a queste mie e in qualche particolare coincidono quasi; accentuandone così l'interesse.

Sia $f(\xi)$ una funzione di $\xi = a + ib$ monodroma finita e continua entro l'area σ racchiusa dal contorno (s); e sia $z = x + iy$ l'affisso d'un punto arbitrario del piano (entro σ o fuori). BELTRAMI ha considerato la funzione

$$\varphi = \int_\sigma \frac{f(z)}{\xi - z}\, d\sigma,$$

e ha dimostrato ch'essa è monodroma finita e continua in tutto il piano e che s'annulla all'infinito. Le sue derivate sono discontinue soltanto sul contorno. Infine, in tutti i punti del piano soddisfa all'equazione

$$D_i\varphi = -2\pi f(z).$$

Ne consegue, dalle nostre ricerche della Nota precedente, che cotesta φ è una funzione analitica d'ordine z entro (s), mentre all'esterno, dove $f(z) = 0$, è una ordinaria funzione analitica.

Più generalmente, se $u + iv$ è funzione di a e b (non di ξ), la funzione

$$\varphi = \int_\sigma \frac{u + iv}{\xi - z}\, d\sigma$$

gode ancora delle proprietà precedenti e si ha

$$D_i\varphi = -2\pi(u + iv) = \psi,$$

ove qui $u + iv$ è funzione di x e y. Ne risulta che, se $u + iv$ è funzione analitica d'ordine $n - 1$ (definita in σ), la φ è analitica regolare d'ordine n in σ, mentre è analitica d'ordine $n - 1$ all'esterno ($\psi = 0$). In sostanza φ cambia l'ordine di analiticità attraverso (s). Questa è una proprietà interessante sotto certi punti di vista.

Altre notevoli proprietà si potrebbero vedere; ma io mi limito a questo accenno e passo a una applicazione.

esame, che qui non intendiamo di fare. Si sa, ad esempio, che già per le funzioni analitiche ordinarie ($n = 1$) basta conoscere sul contorno la loro parte reale, perchè risultino determinate entro l'area σ (a meno d'una costante).

4. L'equazione per l'equilibrio elastico in due dimensioni e assenza di forze di massa è

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \theta - \mu \operatorname{rot} (\omega k) = 0 ;$$

in cui, dette u e v le proiezioni dello spostamento sugli assi, si deve porre

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

k essendo un vettore unitario normale al piano. Introducendo l'operatore i equivalente a $k \wedge$, essa diventa

$$(\lambda + 2\mu \operatorname{grad} \theta - \mu \operatorname{grad} \omega \wedge k = \operatorname{grad} [(\lambda + 2\mu)\theta + i\mu\omega] = 0 ;$$

od anche, con simboli già usati,

$$D_i[(\lambda + 2\mu)\theta + i\mu\omega] = 0.$$

Ma si ha manifestamente

$$\theta + i\omega = D_i'(u + iv); \tag{1}$$

perciò la precedente diventa

$$\mu D_i' D_i(u + iv) + (\lambda + \mu) D_i\theta = 0. \tag{2}$$

Per il noto fatto che θ è funzione armonica, si deduce di qui

$$\mu D'^2_i D_i(u + iv) = -(\lambda + \mu) D_i' D_i\theta = -(\lambda + \mu)\Delta\theta = 0; \tag{3}$$

la quale dimostra che $D_i(u + iv)$ è funzione analitica del secondo ordine, talchè, in base alle cose dette nella Nota precedente, potremo porre

$$\mu D_i(u + iv) = 2zf'(z_1) + \varphi'(z_1).$$

Ma il secondo membro può assumere la forma

$$D_i(zf(z_1) + \varphi(z_1));$$

ne consegue

$$\mu(u + iv) = zf(z_1) + \varphi(z_1) + \varphi(z). \tag{4}$$

Questa espressione di $u + iv$ soddisfa la (3); ma non è detto che in tutta la sua generalità verifichi anche la (2). Bisognerà sostituirla in (2) e vedere quali relazioni devono passare tra le funzioni f, φ e ψ. A tal fine basta unire alla (1) l'equazione

$$\theta - i\omega = D_i(u - iv)$$

e ricavar θ. Allora la (2) diventa

$$(\lambda + 3\mu) D_i' D_i(u + iv) + (\lambda + \mu) D_i^2(u - iv) = 0.$$

Ma, essendo per le formule precedenti

$$D_i' D_i(u+iv) = 4f(z_1), \quad D_i^2(u-iv) = 4\varphi''(z_1),$$

ne consegue

$$(\lambda + 3\mu)f'(z_1) + (\lambda + \mu)\,\varphi''(z_1) = 0.$$

Dunque nella (4) si dovrà porre

$$\varphi(z) = -\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\int f(z)dz + cz\,;$$

essendo c una costante. Così abbiamo infine

$$\mu(u+iv) = zf(z_1) + \varphi(z_1) - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\int f(z)dz + cz\,;$$

che è la notevole soluzione di KOLOSSOFF [1]. Con questa si possono poi calcolare facilmente le tensioni elastiche e fare varie interessanti applicazioni, come si può vedere nella Memoria di quell' Autore.

Bologna, gennaio 1923.

[1] *Zeitschrift*, 1914 (non 1910, come fu stampato nella Nota precedente).