Bollettino Unione Matematica Italiana

Onorato Nicoletti

Sopra un teorema di Clebsch

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.3, p. 91–93.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_3_91_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

Sopra un teorema di Clebsch.

Nota di ONORATO NICOLETTI

Siano (con $m < n$)

(1) $X = |x_i^{(k)}|$, $Y = |y_l^{(k)}|$, $(i = 1, 2, \ldots m;\ l = 1, 2, \ldots n - m;\ k = 1, 2, \ldots n)$

due matrici di n colonne e, rispettivamente, di m ed $n - m$ righe, le quali abbiano le caratteristiche m ed $n - m$; e si abbiano le $m(n - m)$ relazioni:

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n}{}_k x_i^{(k)} y_l^{(k)} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots m;\ l = 1, 2, \ldots n - m);$$

cioè il prodotto per righe delle due matrici X, Y abbia nulli tutti gli elementi.

Diciamo $(k_1 k_2 \ldots k_m)$ una qualunque combinazione di classe m dei numeri $1, 2, \ldots n$ (e sia ad es. $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$); ed indichiamo con $X_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ il minore della matrice X, formato con tutte le righe e colle colonne $k_1, k_2, \ldots k_m$; sia invece $Y_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ il minore ottenuto dalla matrice Y, conservandone tutte le $n - m$ righe e *sopprimendo* le colonne $k_1, k_2, \ldots k_m$ (lasciando le altre colonne nel loro ordine naturale), moltiplicato poi per $(-1)^\sigma$, con $\sigma = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$; posto inoltre un ordine determinato tra le $\nu = \binom{m}{n}$ combinazioni $(k_1, \ldots, k_m)$ della classe m dei numeri $1, 2, \ldots n$, per semplicità di scrittura indichiamo con un solo indice X_ρ, Y_ρ $\left(\rho = 1, 2, \ldots \binom{n}{m}\right)$ i minori $X_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ e gli $Y_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ corrispondenti.

Con queste notazioni, si ha il teorema (di Clebsch):

La matrice $\begin{vmatrix} X_\rho \\ Y_\rho \end{vmatrix}$ $(\rho = 1, 2, \ldots \nu)$ *ha la caratteristica* 1;

cioè: *I minori* X_ρ *sono proporzionali agli* Y_ρ *corrispondenti.*

Per dimostrarlo, indichiamo con $\bar{x}_i^{(k)}$, $\bar{y}_l^{(k)}$ i numeri complessi coniugati delle $x_i^{(k)}$, $y_l^{(k)}$; e consideriamo i due determinanti (complessi coniugati) di ordine n:

$$(3)\quad A = \begin{vmatrix} x_i^{(k)} \\ y_l^{(k)} \end{vmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{x}_i^{(k)} \\ \bar{y}_l^{(k)} \end{vmatrix}, \quad (i = 1, 2, \ldots m;\ l = 1, 2, \ldots n-m;\ k = 1, 2, \ldots n).$$

Dalle (2) e dalle complesse coniugate, si ha subito, moltiplicando per righe

$$A\bar{A} = (X\bar{X}) \cdot (Y\bar{Y}) = \left\{ \sum_1^\nu{}_\rho X_\rho \bar{X}_\rho \right\} \cdot \left\{ \sum_1^\nu{}_\tau Y_\tau \bar{Y}_\tau \right\},$$

dove abbiamo indicato con $(X\bar{X}) = \sum_1^\nu{}_\rho X_\rho \bar{X}_\rho$ il prodotto per righe della matrice X per la sua complessa coniugata. D'altra parte sviluppando i determinanti A ed $\bar{A}$ per i minori delle loro matrici delle prime m righe, si ha

$$A = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \sum_1^\nu{}_t X_t \bar{Y}_t, \quad \bar{A} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \sum_1^\nu{}_u \bar{X}_u Y_u;$$

si ha così l'uguaglianza

$$\left(\sum_1^\nu{}_\rho X_\rho \bar{X}_\rho\right)\left(\sum_1^\nu{}_\tau Y_\tau \bar{Y}_\tau\right) - \left(\sum_1^\nu{}_t X_t \bar{Y}_t\right)\left(\sum_1^\nu{}_u \bar{X}_u Y_u\right) = 0,$$

la quale esprime che il prodotto per righe delle due matrici (di 2 righe e ν colonne)

$$\begin{vmatrix} X_t \\ Y_t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{X}_u \\ \bar{Y}_u \end{vmatrix}, \quad (t,\ u = 1, 2, \ldots \nu)$$

è uguale allo zero; si ha cioè per tutte le coppie (t, u):

$$\sum_{1}^{\nu}{}_{tu}(X_t Y_u - X_u Y_t)(\bar{X}_t \bar{Y}_u - \bar{X}_u \bar{Y}_t) = \sum_{1}^{\nu}{}_{tu} \left| X_t Y_u - X_u Y_t \right|^2 = 0;$$

è quindi, per ogni coppia (t, u):

$$X_t Y_u - X_u Y_t = 0,$$

ciò che dimostra il teorema enunciato.

Pisa, febbraio 1923.