# Bollettino Unione Matematica Italiana



Mauro Picone


## Su una proposizione dell'Allumisi


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **2** (1923), n.3, p. 97–101.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_3_97_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

## Su una proposizione dell'Almansi.

Nota di MAURO PICONE

Qualche giorno fa il mio amico prof. L. TONELLI ha avuto l'occasione, per me ben gradita, di ricordarmi una sua nota del 1914, recante lo stesso titolo della presente, inserita nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (vol. XXIII della serie 5ª). In questa elegante nota il TONELLI, estendendo alle funzioni assolutamente continue con derivata di quadrato sommabile una proposizione che l'ALMANSI aveva stabilito per le funzioni continue dotate di derivata continua, raggiunge un risultato che qui voglio enunciare sotto l'interessante forma seguente:

I. *nella totalità $\Gamma^*$ costituita dalle funzioni reali $y(x)$ della variabile reale $x$, definite nell'intervallo $(a, b)$, ivi assolutamente continue, con derivata di quadrato sommabile, verificanti la condizione $y(a) = y(b)$, la seguente funzione della $y$:*

$$J[y] = \frac{\int_a^b y^2 dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b y\, dx\right)^2}{\int_a^b y'^2 dx},$$

*ha per massimo valore*

$$(b-a)^2 : 4\pi^2,$$

*che raggiunge allora e allora soltanto che sia,* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *designando costanti arbitrarie,*

$$y(x) = \gamma + \alpha \cos \frac{2\pi(x-a)}{b-a} + \beta \operatorname{sen} \frac{2\pi(x-a)}{b-a}.$$

Sono rimasti infruttuosi taluni brevi tentativi da me fatti, in questi giorni, per dimostrare la proposizione enunciata, in modo più diretto e più elementare, indipendentemente dalla formola di PARSEVAL per le serie trigonometriche, alla quale fanno appunto ricorso tanto l'ALMANSI quantó il TONELLI. Laddove, le due seguenti proposizioni:

II. *nella totalità* $\Gamma_a$ *delle funzioni* $y(x)$ *assolutamente continue in* $(a, b)$ *con derivata ivi di quadrato sommabile, nulle in* $a$, *la funzione di* $y$:

$$\int_a^b y^2 dx : \int_a^b y'^2 dx, \tag{1}$$

*ha per massimo valore* $4(b-a)^2 : \pi^2$, *che raggiunge allora e allora soltanto che sia*

$$y(x) = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)};$$

III. *nella totalità* $\Gamma_{ab}$ *delle funzioni* $y(x)$ *assolutamente continue in* $(a, b)$ *con derivata ivi di quadrato sommabile, nulle in* $a$ *e in* $b$, *la funzione* (1) *ha per minimo valore* $(b-a)^2 : \pi^2$, *che raggiunge allora e allora soltanto che sia*

$$y(x) = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi(x-a)}{b-a};$$

sono suscettibili di una immediata dimostrazione elementare, consistente [1], semplicemente, nell'osservare che: Se $y(x)$ è in $\Gamma_a$

[1] Cfr. gli art. 7 e 10 del Cap. III del mio *Corso di Analisi superiore* dell'anno passato (Fascicolo II, *Nozioni di Calcolo delle variazioni*), pubblicato e edito dal « Circolo Matematico » di Catania (R. Università).

A torto si attribuisce a HADAMARD il teor. III enunciato nel testo, esso invece deriva da PICARD (cfr. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, pagine 115-117 della 1ª edizione, anno 1896). Così pure il teor. II trovasi per la prima volta enunciato, fin dal 1907, al n.° 25 della mia Tesi di Laurea: *Su un problema al contorno nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. X).

riesce

$$\int_a^b \left( y'(x) - \frac{\pi y(x)}{2(b-a)} \cot \frac{\pi(x-a)}{2(b-c)} \right)^2 dx = \int_a^b y'^2 dx - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_a^b y^2 dx,$$

e se $y(x)$ è in $\Gamma_{ab}$,

$$\int_a^b \left( y'(x) - \frac{\pi y(x)}{b-a} \cot \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right)^2 dx = \int_a^b y'^2 dx - \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b y^2 dx.$$

Ritornando a considerare la funzione di linea $J[y]$ alla quale si riferisce la proposizione I, è notevolissimo che, al contrario, come mostrerò in questa nota, come conseguenza quasi immediata del teor. II e quindi in modo affatto elementare, si trova il massimo di $J[y]$ nella totalità $\Gamma$, più ampia della $\Gamma^*$, ottenuta togliendo per le funzioni $y(x)$ la condizione di assumere valori eguali in $a$ e in $b$. L'indicato massimo è il quadruplo del massimo di $J[y]$ in $\Gamma^*$, si trova cioè che:

IV. *Nella totalità $\Gamma$ delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in $(a, b)$ con derivata ivi di quadrato sommabile, la funzione di linea $J[y]$ ha per massimo valore $(b-a)^2 : \pi^2$, che raggiunge allora e allora soltanto che sia*

$$y(x) = \gamma + \alpha \cos \frac{\pi(x-a)}{b-a}.$$

**1.** Si osservi che, quali si siano le costanti $\alpha$ e $\beta$, si ha sempre:

(2) $$J[\alpha y + \beta] = J[y].$$

Pertanto: $J[y] = J[y(x) - y(a)]$, e quindi il massimo di $J[y]$ nella totalità $\Gamma^*$ è quello nella totalità $\Gamma_{ab}^* (\equiv \Gamma_{ab})$ delle funzioni di $\Gamma^*$ nulle in $a$. Sia $c = (a+b)/2$, il punto di mezzo di $(a, b)$, poichè $J[y] = J[y(x) - y(c)]$, il massimo di $J[y]$ nella totalità $\Gamma$ è quello nella totalità $\Gamma_c$ delle funzioni di $\Gamma$ nulle nel punto di mezzo $c$ dell'intervallo $(a, b)$. Ma per ogni funzione $y(x)$ di $\Gamma$ si ha

$$J[y] \leq \int_a^b y^2 dx : \int_a^b y'^2 dx,$$

e se $y(x)$ è in $\Gamma_c$, in virtù di II,

$$\int_a^c y^2 dx \leq 4 \frac{(c-a)^2}{\pi^2} \int_a^c y'^2 dx = \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^c y'^2 dx,$$

$$\int_c^b y^2 dx \leq 4 \frac{(b-c)^2}{\pi^2} \int_c^b y'^2 dx = \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_c^b y'^2 dx.$$

onde

$$J[y] \leq \int_a^b y^2 dx : \int_a^b y'^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2},$$

laddove

$$J\left[\cos\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right] = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}.$$

È così dimostrato il teor. IV.

**2.** Vi è un minimo per $J[y]$ nella totalità $\Gamma^*$ o nella $\Gamma$? In forza della relazione di SCHWARZ, od anche osservando l'identità

$$\int_a^b y^2 dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b y dx\right)^2 = \int_a^b \left(y(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b y dx\right)^2 dx,$$

si vede che per ogni funzione $y(x)$ di $\Gamma$ si ha:

$$J[y] > 0.$$

D'altra parte per la funzione $y(x) = (x-a)^n(b-x)$, appartenente a $\Gamma^*$, risulta:

$$\lim_{n \to \infty} J[(x-a)^n(b-x)] = 0.$$

Ne segue:

V. *La funzione di linea $J[y]$ non ha minimo nè in $\Gamma^*$ nè in $\Gamma$, essa vi ha lo zero per estremo inferiore.*

Adunque: Al variare di $y(x)$ nel campo delle funzioni assolutamente continue in $(a, b)$, con derivata ivi di quadrato sommabile, la funzione di linea $J[y]$ prende esclusivamente valori dell'intervallo $\left(0, \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right)$, aperto a sinistra; tale intervallo si riduce alla sua quarta parte, di origine nel punto zero, se la $y(x)$ soddisfa inoltre alle condizioni $y(a) = y(b)$.

**3.** Il teorema IV asserisce che, per ogni funzione $y(x)$ di $\Gamma$, si ha

$$\int_a^b y^2 dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b y dx\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b y'^2 dx.$$

Del primo membro di questa disuguaglianza si può trovare, nel modo che vado a dire, un altro integrale non inferiore, operante sempre sul quadrato della derivata prima. Poniamo, per $t$ in $(a, b)$,

$$\varphi(t) = \int_a^t y^2 dx - \frac{1}{t-a}\left(\int_a^t y dx\right)^2,$$

si ha

$$\varphi'(t) = \frac{1}{(t-a)^2}\left(\int_a^t (x-a) y'(x) dx\right)^2,$$

e quindi

$$\varphi(b) = \int_a^b y^2 dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b y dx\right)^2 = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^2}\left(\int_a^t (x-a) y'(x) dx\right)^2.$$

Ma, per la relazione di SCHWARZ, risulta:

$$\left(\int_a^t (x-a) y'(x) dx\right)^2 \leqq \frac{(t-a)^3}{3}\int_a^t y'^2 dx.$$

il segno eguale sussistendo allora e allora soltanto che sia $y'(x) = \alpha(x-a)$, con $\alpha$ costante. Ne segue

$$\varphi(b) \leqq \frac{1}{3}\int_a^b (t-a) dt \int_a^t y'^2 dx = \frac{1}{6}\int_a^b [(b-a)^2 - (x-a)^2] y'^2(x) dx.$$

Insieme dunque al teorema IV si ha il seguente:

VI. *Per ogni funzione $y(x)$ assolutamente continua in $(a, b)$, con derivata ivi di quadrato sommabile, sussiste la relazione*

$$\int_a^b y^2 dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b y dx\right)^2 \leqq \frac{1}{6}\int_a^b [(b-a)^2 - (x-a)^2] y'^2(x) dx,$$

*il segno eguale verificandosi allora e allora soltanto che sia $y(x) = \alpha(x-a)^2 + \beta$, con $\alpha$ e $\beta$ costanti.*

Di qui risulta soltanto che, per $y(x)$ in $\Gamma$, è

$$J[y] < \frac{(b-a)^2}{6}.$$

*Catania, 2 febbraio 1923.*