Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Gino Loria

Applicazioni geometriche di una formula di F. Siacci

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.4, p. 121–125.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_4_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

PICCOLE NOTE

Applicazioni geometriche di una formola di F. Siacci.

Nota di Gino Loria [1]

5. Un'altra applicazione dotata di maggiore novità è offerta da un nuovo elemento recentemente introdotto nella teoria delle curve sghembe [2]. Come da tempo si è considerata la sfera passante per quattro punti consecutivi di una curva gobba, così, se si considerano quattro piani osculatori della stessa, essi sono toccati da otto sfere, una delle quali tende ad una posizione limite determinata, quando quei quattro piani tendono a confondersi: la chiameremo *sfera paraosculatrice.* Per determinarla, manteniamo le ipotesi e le notazioni esposte nel n.° prec. ed osserviamo che l'equazione generale del piano osculatore della curva (5) è

$$\lambda x + \mu Y + \nu Z - W = 0,$$

ove, per le fatte ipotesi, λ, μ, ν, W sono funzioni note dell'arco s. Le coordinate del centro ed il raggio di una delle sfere tangenti ai piani osculatori nei punti determinati dai valori s_1, s_2, s_3, s_4 dell'arco sono determinate dalle equazioni

$$\begin{aligned} \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z - W_1 &= R \\ \dots\dots\dots&\dots\dots \\ \dots\dots\dots&\dots\dots \\ \lambda_4 x + \mu_4 y + \nu_4 z - W_4 &= R, \end{aligned}$$

(1) Continuazione, v. pag. 93.

(2) B. Hostinski, *Sur les propriétés de le sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une surface développable* (Compte-rendu du Congrès intern. des Mathématiciens, Strasbourg, 1920).

*

(avendo scritto per brevità λ_1 in luogo di $\lambda(s_1)$ ecc.). Eliminando x, y, z si trova:

$$R = -\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & W_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 & W_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Applicando ora la formola di Siacci, si trova per il raggio della sfera paraosculatrice la seguente espressione:

$$(10) \qquad R = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu & W \\ \lambda' & \mu' & \nu' & W' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & W'' \\ \lambda''' & \mu''' & \nu''' & W''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \\ \lambda''' & \mu''' & \nu''' \end{vmatrix}\,[1].$$

Il problema di determinare R in funzione di s è così in fondo risoluto. Ma, applicando le formole di Serret-Frenet, si può porre l'espressione di R sotto forma notevole, come ora mostreremo:

Posto provvisoriamente per brevità $\frac{1}{r} = A$, $\frac{1}{\rho} = B$, dette formole si scrivono

$$\alpha' = A\xi, \quad \xi' = -A\alpha - B\lambda, \quad \lambda' = B\xi; \text{ ecc.}$$

onde nuove differenziazioni danno le relazioni

$$\lambda'' = -AB\alpha + B'\xi - B\lambda,$$
$$\lambda''' = -(2AB' + A'B)\alpha + (B'' - A^2B - B^3)\xi - 3BB'\lambda$$

e le quattro analoghe. Per conseguenza

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -AB & -(2AB' + A'B) \\ B & B' & B'' - A^2B - B^3 \\ 0 & B^2 & -3BB' \end{vmatrix} = B^3(A'B - AB').$$

[1] Applicando la stessa formola si possono calcolare le coordinate del centro della sfera paraosculatrice.

Per esprimere similmente il numeratore della formola (10) osserviamo che:

$$U' = 1 + AV, \quad V' = -AU - BW, \quad W' = BV$$
$$W'' = -ABU + B'V - B^2 W$$
$$W''' = -AB - (2AB' + A'B)U + (B'' - A^2B - B^3)V - 3BB'W;$$

si vede allora che quel numeratore vale

$$\begin{vmatrix} \lambda & W \\ B\xi & BV \\ -AB\alpha + B'\xi - B\lambda & -ABU + B'V - B^2W \\ -(2AB' + A'B)\alpha + (B'' - A^2B - B^3)\xi - 3BB'\lambda & -AB - (2AB' + A'B)U + (B'' - A^2B - B^3)V - 3BB'W \end{vmatrix},$$

ossia, sottraendo dall'ultima verticale le altre tre moltiplicate risp. per x, y, z,

$$(12) \qquad -AB \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -AB \\ 0 & B & B' \\ 1 & 0 & B^2 \end{vmatrix} = -A^2B^3.$$

In virtù delle (11) e (12), la (10) diviene

$$R = \frac{A^2}{AB' - A'B} = \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)'}$$

o finalmente, restituendo a A e B i loro valori

$$(13) \qquad R = \frac{1}{\left(\frac{r}{\rho}\right)'}$$

e questa è l'espressione annunziata.

Se la variabile indipendente fosse una t differente da s, si avrebbe, invece della (13),

$$(14) \qquad R = \frac{ds}{dt} : \frac{d}{dt}\left(\frac{r}{\rho}\right).$$

Notisi che per le eliche, essendo costante il rapporto $\frac{r}{\rho}$, R è sempre infinito.

6. Chiuderemo mostrando come la medesima formola conduca all'equazione di uno dei coni di rivoluzione annessi ad un punto qualunque P di una curva Γ: parliamo del cono a cui tende quello determinato dalla tangente in P a Γ e dalle parallele condotte da questo punto alle tangenti in altri due punti P_1 e P_2, quando questi si accostano indefinitamente a P (1). Notiamo, infatti, che posto

$$k = \frac{1}{\cos \omega}$$

il cono rotondo avente per vertice il punto (x, y, z) e per apertura ω ed il cui asse ha per coseni direttori a, b, c ha per equazione

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = k^2 \{ a(X-x) + b(Y-y) + c(Z-z) \}^2;$$

se poi esso deve contenere le direzioni (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ lo si può rappresentare come segue:

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 =$$
$$\left\{ \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\}^2.$$

Supponendo ora che quelle tre direzioni appartengano alle tangenti della curva Γ in P, P_1, P_2 e applicando la formola di Siacci, si trova come equazioni del cono dianzi definito la seguente:

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 =$$
$$\left\{ \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \right\}^2.$$

Sostituendo alle derivate $\alpha', \ldots, \gamma''$ i valori superiormente

(1) G. SCHEFFERS, Op. cit., p. 341.

calcolati, quest'equazione assume la forma:

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=\frac{1}{r^2}\{(X-x)(\alpha r-\gamma\rho)+\ldots\}^2,$$

donde emerge che il cono ottenuto ha un'apertura ω tale che

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\rho}{r}$$

ed un asse i cui coseni direttori valgono risp.

$$\frac{\alpha r-\lambda\rho}{\sqrt{r^2+\rho^2}},\quad \frac{\beta r-\mu\rho}{\sqrt{r^2+\rho^2}},\quad \frac{\gamma r-\nu\rho}{\sqrt{r^2+\rho^2}}.$$

Genova, gennaio 1923.