Bollettino Unione Matematica Italiana

Onorato Nicoletti

Sui determinanti ortogonali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.5, p. 161–163.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_5_161_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

PICCOLE NOTE

Sui determinanti ortogonali.

Nota di ONORATO NICOLETTI

1. Se un determinante

$$A = |a_{ik}|, \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

è ortogonale, il quadrato di ogni sua linea è uguale ad 1, il prodotto di due linee parallele diverse è nullo; coi simboli δ_{hk} di KRONECKER ($\delta_{hh} = 1$, $\delta_{hk} = 0$ per $h \neq k$) si hanno cioè le relazioni

$$(2) \qquad U_{pq} = \sum_1^n{}_t\, a_{pt}\, a_{qt} - \delta_{pq} = 0$$

$$(p, q, r, s = 1, \ldots n)$$

$$(2') \qquad V_{rs} = \sum_1^n{}_t\, a_{tr}\, a_{ts} - \delta_{rs} = 0.$$

Inversamente se, ad esempio, valgono le n^2 relazioni (2), il determinante A è ortogonale e quindi valgono per esse anche le (2').

Ne segue che, secondo KRONECKER, i due moduli $(U) = (U_{pq})$, $(V) = (V_{rs})$ debbono dirsi *equivalenti*; pensando cioè le a_{ik} come n^2 variabili indipendenti, le U_{pq} debbono esprimersi come combinazioni lineari omogenee delle V_{rs} con coefficienti funzioni *razionali intere* delle a_{ik}, ed inversamente. Vogliamo dimostrare questa asserzione.

2. Perciò, più generalmente, consideriamo due determinanti di ordine n

$$(3) \qquad A = |a_{ik}|, \quad B = |b_{ik}|, \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

ed indicando con ε_{pq}, γ_{rs} delle indeterminate poniamo:

$$(4) \qquad H_{pq} = \sum_1^n{}_t\, a_{pt}\, b_{qt} - \varepsilon_{pq}$$

$$(p, q, r, s = 1, \ldots n):$$

$$(4') \qquad K_{rs} = \sum_1^n{}_t\, a_{tr}\, b_{ts} - \gamma_{rs};$$

le (4) possono allora scriversi

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_l\, a_{pl}\, b_{ql} = \varepsilon_{pq} + H_{pq}$$

e da queste si ha, moltiplicando per righe i determinanti A, B:

$$(6) \qquad AB \equiv |\varepsilon_{pq}| \qquad (\mathrm{mod.}\ H)$$

dove abbiamo indicato con H il modulo delle H_{pq}. Indichiamo ora con $\bar{A} = |A_{ik}|$ il determinante aggiunto del determinante A; dalle (5) moltiplicando per A_{pt} e sommando, indice p, da 1 ad n, abbiamo:

$$Ab_{qt} \equiv \sum_1^n {}_p\, \varepsilon_{pq}\, A_{pt} \qquad (\mathrm{mod.}\ H)$$

e dalle (4') abbiamo:

$$(7) \qquad AK_{rs} \equiv \sum_1^n {}_{pt}\, a_{tr}\, \varepsilon_{pt}\, A_{ps} - A\gamma_{rs} \qquad (\mathrm{mod}\ H).$$

Sia in particolare $\varepsilon_{pq} = \delta_{pq}$; ed allora $|\varepsilon_{pq}| = 1$, e per la (6) sarà

$$(6') \qquad AB \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\ H)$$

e moltiplicando la (7) per B, si hanno le relazioni

$$K_{rs} \equiv \delta_{rs} - \gamma_{rs} \qquad (\mathrm{mod.}\ H)$$

Se quindi è anche $\gamma_{rs} \equiv \delta_{rs}$, si avranno le n^2 congruenze:

$$K_{rs} \equiv 0. \qquad (\mathrm{mod.}\ H),\ (r, s = 1, 2 \ldots n)$$

Scambiando nei due determinanti A, B le righe colle colonne, si hanno, analogamente, le n^2 congruenze:

$$H_{pq} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ K)$$

con $K = (K_{rs})$; cioè, posto

$$(4) \qquad H_{pq} = \sum_1^n {}_l\, a_{pl}\, b_{ql} - \delta_{pq}$$

$$(4') \qquad K_{rs} = \sum_1^n {}_t\, a_{ts}\, b_{ts} - \delta_{rs}$$

i due moduli H e K sono equivalenti. Facendo le b_{ik} uguali alle a_{ik}, si ha che i moduli (U), (V) delle (2), (2') sono equivalenti. c. d. d.

3. Facciamo nelle (4) $H_{pq}=K_{rs}=0$; le ε_{pq}, η_{rs} sono allora gli elementi dei due determinanti che si hanno moltiplicando i determinanti A, B per righe e per colonne; per $A \neq 0$, si hanno quindi tra questi elementi le n^2 relazioni

$$\eta_{rs}=\frac{1}{A}\sum_{1}^{n}{}_{pt}\,\varepsilon_{pt}\,a_{tr}\,A_{ps} \tag{8}$$

e analogamente le altre, per $B \neq 0$,

$$\varepsilon_{pq}=\frac{1}{B}\sum_{1}^{n}{}_{sl}\,\eta_{ls}\,B_{ps}\,b_{ql} \tag{8'}$$

che possono anche scriversi

$$\sum_{1}^{n}{}_{s}\,a_{us}\,\eta_{rs}=\sum_{1}^{n}{}_{t}\,a_{tr}\,\varepsilon_{ut}, \tag{9}$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{p}\,b_{pa}\,\varepsilon_{pq}=\sum_{1}^{n}{}_{l}\,b_{ql}\,\eta_{la}. \tag{9'}$$

Quando poi sia, ad es., $A=0$, in luogo delle (8), si hanno le altre relazioni

$$\sum{}_{pt}\,\varepsilon_{pt}\,a_{tr}\,A_{ps}=0;$$

ed in queste, come in tutte le precedenti, tutti gli indici prendono i valori da 1 ad n.