Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Filippo Sibiriani

# Intorno alla Nota di G. Loria :Applicazioni geometriche di una formula di F. Siacci

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **2** (1923), n.5, p. 167–170.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_5_167_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

## Intorno alla Nota di G. Loria: Applicazioni geometriche di una formula di F. Siacci.

Nota di Filippo Sibirani

**1.** Il prof. G. Loria ha voluto mostrare nel fascicolo III di questo *Bollettino* come una formula di F. Siacci sia germe di estese applicazioni geometriche. Il modo con cui l'autore espone il risultato di Siacci, la dimostrazione che egli ne dà e la dimostrazione datane dal Novarese nella Nota citata dal Loria, non mettono, a mio avviso, in piena luce la portata del risultato, specialmente in riguardo alle applicazioni geometriche che se ne vogliano trarre e che mi sembra appaia meglio dall'enunciato e dalla dimostrazione che qui ne darò.

**2.** Il Loria considera il quoziente dei due determinanti

$$
(1)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) \ldots\ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) \ldots\ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) \ldots\ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) \ldots\ldots & \psi_n(x_0) \\ \psi_0(x_1) & \psi_1(x_1) \ldots\ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_0(x_n) & \psi_1(x_n) \ldots\ldots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix},
$$

ove le $\varphi$ e $\psi$ sono $2(n+1)$ funzioni analitiche di una variabile, definite ciascuna in un determinato intervallo e suppone che gli intervalli abbiano una parte comune in cui cadono $x_0, x_1, \ldots. x_n$. Ora — egli dice — se $x_1, x_2 \ldots. x_n$ si accostano ad $x_0$, quel quoziente si presenta sotto forma indeterminata ed il suo valore è in generale espresso come segue:

$$
(2)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots\ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0'(x_0) & \varphi_1'(x_0) & \ldots\ldots & \varphi_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0^{(n)}(x_0) & \varphi_1^{(n)}(x_0) & \ldots\ldots & \varphi_n^{(n)}(x_0) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) & \ldots\ldots & \psi_n(x_0) \\ \psi_0'(x_0) & \psi_1'(x_0) & \ldots\ldots & \psi_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n^{(n)}(x_0) & \psi_1^{(n)}(x_0) & \ldots\ldots & \psi_n^{(n)}(x_0) \end{vmatrix}.
$$

Nelle righe che seguono il Loria dimostra il teorema mediante l'applicazione della regola dell'Hospital.

Due osservazioni importanti sono da farsi:

1ª La condizione dell'analiticità delle funzioni $\varphi$ e $\psi$, se è superflua per l'applicazione della regola dell'Hospital, per la quale basta ammettere che le $\varphi$ e $\psi$ abbiano derivate fino alle $n$-esime e queste siano continue in $x_0$ [1], costituisce una restrizione grave per le applicazioni geometriche che se ne vogliano dedurre; bisognerebbe limitarsi a curve le coordinate dei cui punti fossero esprimibili mediante funzioni analitiche di un parametro.

2ª La dimostrazione che il limite del rapporto (1) è il rapporto (2), fatta con l'applicazione della regola dell'HOSPITAL o con il metodo che ha usato il NOVARESE, è legittima qualora si dica che si passa al limite per $x_1, x_2, \ldots x_n$ tendenti *successivamente* ad $x_0$. Anche questa è una restrizione grave per le applicazioni geometriche, perchè, ad es., il piano osculatore ad una curva $\gamma$ in $P_1$ non si potrebbe definire la posizione limite del piano per $P_1P_2P_3$ al tendere *comunque* di $P_2$ e $P_3$ sulla $\gamma$ a $P_1$, ma si dovrebbe definire la posizione limite del piano per $P_1P_2P_3$ al tendere *successivamente* di $P_2$ e $P_3$ a $P_1$.

3. Ma l'enunciato relativo alla formula di SIACCI può essere questo:

*Se le $\varphi$ e $\psi$ sono $2(n+1)$ funzioni di $x$ aventi derivate fino alle $n$-esime in un intervallo contenente $x_0, x_1, \ldots x_n$ e le derivate $n$-esime sono continue in $x_0$, il rapporto (1) tende generalmente [2] al rapporto (2) comunque $x_1, x_2, \ldots x_n$ tendono ad $x_0$.*

Usando di una notazione assai nota della teoria delle funzioni interpolari, il rapporto (1) si può trasformare in

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_0, x_1) & \varphi_1(x_0, x_1) \ldots & \varphi_n(x_0, x_1) \\ \varphi_0(x_0, x_2) & \varphi_1(x_0, x_2) \ldots & \varphi_n(x_0, x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_0, x_n) & \varphi_1(x_0, x_n) \ldots & \varphi_n(x_0, x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \ldots \psi_n(x_0) \\ \psi_0(x_0, x_1) & \ldots \psi_n(x_0, x_1) \\ \psi_0(x_0, x_2) & \ldots \psi_n(x_0, x_2) \\ \cdots & \cdots \\ \psi_1(x_0, x_n) & \ldots \psi_n(x_0, x_n) \end{vmatrix}$$

sottraendo in ciascun determinante dalla 2ª, 3ª,.... $(n+1)$-esima riga la prima e dividendo poi la 2ª, 3ª,.... $(n+1)$esima riga ri-

[1] Se le derivate $n$-esime non fossero continue, ma esistessero i limiti di $\varphi_k^{(n)}(x)$, $\psi_k^{(n)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots n)$ per $x \to x_0$, basterebbe sostituire, nei due determinanti del rapporto, alle righe $(n+1)$-esime questi limiti.

[2] Si dice « generalmente » perchè non è escluso che il rapporto (1) si presenti ancora sotto la forma $\frac{0}{0}$.

spettivamente per $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0, \dots x_n - x_0$; e successivamente in

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_0, x_1) & \varphi_1(x_0, x_1) \dots & \varphi_n(x_0, x_1) \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2) & \varphi_2(x_0, x_1, x_2) \dots & \varphi_n(x_0, x_1, x_2) \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_3) & \varphi_1(x_0, x_1, x_3) \dots & \varphi_n(x_0, x_1, x_3) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_n) & \varphi_1(x_0, x_1, x_n) \dots & \varphi_n(x_0, x_1, x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \dots \psi_n(x_0) \\ \psi_0(x_0, x_1) & \dots \psi_n(x_0, x_1) \\ \psi_0(x_0, x_1, x_2) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_2) \\ \psi_0(x_0, x_1, x_3) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_3) \\ \dots & \dots \\ \psi_0(x_0, x_1, x_n) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_n) \end{vmatrix}$$

sottraendo in ciascun determinante dalla 3ª, 4ª,... $(n+1)$-esima riga la 2ª e dividendo poi le 3ª, 4ª,... $(n+1)$-esima riga per $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1, \dots x_n - x_1$; e poi in

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1 x_1) & \varphi_1(x_0, x_1) & \dots \varphi_n(x_0, x_1) \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2) & \varphi_1(x_0, x_1, x_2) & \dots \varphi_n(x_0, x_1, x_2) \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_3) & \varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) & \dots \varphi_n(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_4) & \varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_4) & \dots \varphi_n(x_0, x_1, x_2, x_4) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_n) & \varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_n) & \dots \varphi_n(x_0, x_1, x_2, x_n) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \psi_0(x_1) & \dots \psi_n(x_0) \\ \psi_0(x_0, x_1) & \dots \psi_n(x_0, x_1) \\ \psi_0(x_0, x_1, x_2) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_2) \\ \psi_0(x_0, x_1, x_2, x_3) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ \psi_0(x_0, x_1, x_2, x_4) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_2, x_4) \\ \dots & \dots \\ \psi_0(x_0, x_1, x_2, x_n) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_2, x_n) \end{vmatrix}$$

di guisa che, continuando, si giungerà al rapporto

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_0, x_1) & \dots \varphi_n(x_0, x_1) \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2) & \dots \varphi_n(x_0, x_1, x_2) \\ \dots & \dots \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-2}, x_{n-1}) & \dots \varphi_n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}) \\ \varphi_0(x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n) & \dots \varphi_n(x_0, x_1, \dots x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \dots \psi_n(x_0) \\ \psi_0(x_0, x_1) & \dots \psi_n(x_0, x_1) \\ \psi_0(x_0, x_1, x_2) & \dots \psi_n(x_0, x_1, x_2) \\ \dots & \dots \\ \psi_0(x_0, x_1, \dots x_{n-1}) & \dots \psi_n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}) \\ \psi_0(x_0, x_1, x_2, \dots x_n) & \dots \psi_n(x_0, x_1, \dots x_n) \end{vmatrix}.$$

Ora è noto [1] che

$$\varphi_r(x_0, x_1, x_2, \ldots x_s) = \frac{1}{s!}\, \varphi_r^{(s)}(x_{rs})$$

indicando con $x_{rs}$ un conveniente numero compreso fra $x_0$ ed $x_s$. Allora il rapporto (3) diviene:

$$\text{(4)} \quad \left|\begin{array}{llll} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_{01}) & \varphi_1'(x_{11}) & \ldots & \varphi_n'(x_{n1}) \\ \varphi^{0''}(x_{02}) & \varphi_1''(x_{12}) & \ldots & \varphi_n''(x_{n2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(n)}(x_{0n}) & \varphi_1^{(n)}(x_{1n}) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x_{nn}) \end{array}\right| : \left|\begin{array}{llll} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) & \ldots & \psi_n(x_0) \\ \psi_0'(x_{01}) & \psi_1'(x_{11}) & \ldots & \psi_n'(x_{n1}) \\ \psi_0''(x_{02}) & \psi_1''(x_{12}) & \ldots & \psi_n''(x_{n2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi^{(n)}(x_{0n}) & \psi^{(n)}(x_{1n}) & \ldots & \psi_n^{(n)}(x_{nn}) \end{array}\right| .$$

Per le ipotesi fatte, al tendere comunque di $x_1, x_2, \ldots x_n$ ad $x_0$, il rapporto (4) tende generalmente al rapporto (2).

*Trieste, agosto 1923.*

[1] Vedi ad es. SCHWARZ H. A. *Démonstration élémentaire d' une propriété fondamentale des fonctions interpolaires.* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, Vol. XVII (1881-82) pp. 740-743.