Bollettino Unione Matematica Italiana

Umberto Cisotti

Sul carattere necessariamente vorticoso dei moti regolari, permanenti di un fluido qualsiasi in ambienti limitati, oppure in quiete all'infinito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.5, p. 170–172.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_5_170_0>

Sul carattere necessariamente vorticoso dei moti regolari, permanenti di un fluido qualsiasi in ambienti limitati, oppure in quiete all'infinito.

Nota di U. CISOTTI

1. Sia S una regione prefissata dello spazio, limitata da una o più superficie chiuse il cui complesso si indicherà con σ. Un fluido qualsiasi occupi lo spazio S e sia dotato di moto entro lo spazio stesso S, senza che si abbia alcun flusso attraverso σ. In tali circostanze il comportamento di σ è quello di superficie di flusso se le particelle fluide scorrono effettivamente su σ stesso, per cui designando $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario normale a σ, in un generico punto, rivolto verso S, e $\boldsymbol{v}$ la velocità si dovrà avere

$$(1) \qquad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{sopra } \sigma.$$

Che se il movimento non raggiungesse, in tutto o in parte, il contorno σ, nei punti corrispondenti di σ si avrebbe $\boldsymbol{v} = 0$. In ogni caso, la (1) deve essere necessariamente soddisfatta. Si rilevi infine che la (1) deve sussistere tanto se σ è costituito da pareti rigide (caso di un recipiente chiuso), quanto se si tratta (anche parzialmente) di superficie libere di flusso.

Durante il moto, in ogni punto di S dovrà verificarsi l'equazione di continuità

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu v) = 0, \quad \text{in } S, \tag{2}$$

nella quale μ designa la densità.

Nell'ipotesi di moti irrotazionali, introducendo il potenziale di velocità φ, si ha

$$v = \operatorname{grad}\varphi; \tag{3}$$

per questa, le (1) e (2) divengono rispettivamente

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dn} &= 0, \quad \text{sopra } \sigma, \\ \frac{\partial\mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}\varphi) &= 0, \quad \text{in } S, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

n designando la direzione del vettore $\boldsymbol{n}$.

2. Il moto sia regolare; in particolare μ e φ siano sempre funzioni uniformi, continue e limitate in S, fino alle derivate seconde quest'ultima e fino alle derivate prime l'altra. La identità

$$\operatorname{div}(\mu\varphi \operatorname{grad}\varphi) = \mu(\operatorname{grad}\varphi)^2 + \varphi \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}\varphi)$$

da luogo, per la seconda delle (4), alla seguente relazione

$$\operatorname{div}(\mu\varphi \operatorname{grad}\varphi) = \mu(\operatorname{grad}\varphi)^2 - \varphi\frac{\partial\mu}{\partial t}.$$

Si moltiplichino entrambi i membri per dS, integrando poscia a tutto lo spazio S; se si nota che, tenendo presente la prima delle (4), è

$$\int_S \operatorname{div}(\mu\varphi \operatorname{grad}\varphi)dS = -\int_\sigma \mu\varphi\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma = 0. \tag{5}$$

e inoltre che

$$T = \frac{1}{2}\int_S \mu(\operatorname{grad}\varphi)^2 dS \tag{6}$$

è la *energia cinetica* della massa fluida, si ottiene in definitiva:

$$2T = \int \varphi\frac{\partial\mu}{\partial t}\,dS, \tag{7}$$

che reputo una nuova espressione dell'energia cinetica, relativa ai moti irrotazionali aciclici di masse fluide continue.

3. Se il moto è *permanente* risulta

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0,$$

in conseguenza dalla (7),

$$T = 0;$$

allora dalla (6), essendo $\mu > 0$, discende senz'altro

$$(\operatorname{grad} \varphi)^2 = v^2 = 0.$$

È quindi nulla la velocità del fluido in ogni punto di S.

Per fluidi omogenei incompressibili, anche in moto variabile, avendosi μ costante, risulta dalla (7) $T = 0$ e quindi, come precedentemente, $v = 0$ ovunque. Questo era noto e la giustificazione si otteneva assai semplicemente, per via puramente cinematica, approfittando della circostanza che per μ costante la seconda delle (4) si riduce ad esprimere l'armonicità della funzione φ: ora ogni funzione armonica e regolare in un campo, avente derivata normale nulla sul contorno si riduce a una costante, per cui $v = \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Constatiamo ora che la inesistenza di moti irrotazionali aciclici regolari e permanenti sussiste anche per i fluidi *comprimibili.* Siamo adunque indotti a concludere che *se vi è effettivo moto permanente della massa fluida, esso deve avere necessariamente carattere vorticoso.*

4. È ovvio che le medesime conclusioni valgono ancora se il fluido si estende indefinitamente, purchè la velocità divenga, all'infinito, infinitesima di ordine sufficiente ad assicurare che continua a sussistere la (5) [1].

[1] *Osservazione sulla mia nota del precedente fascicolo* (pag. 125). Rileva il dott. BENIAMINO SEGRE che le congruenze di linee soddisfacenti alla prima relazione di pag. 128:

$$[(\operatorname{rot} v) \wedge v] \times dP = 0$$

e per le quali vale il teorema di BERNOULLI — *congruenze bernoulliane* — sono tutte e solo quelle per cui

$$(v + m \operatorname{rot} v) \wedge dP = 0,$$

essendo m una funzione scalare arbitraria del punto P.

Va in conseguenza modificata la conclusione del n.° 2 nel senso, ancor più interessante, che oltre le linee di flusso ($m = 0$), e le linee vorticose ($m = \infty$), già considerate, sono altresì congruenze bernoulliane tutte quelle definite dalla precedente relazione, per m diverso da zero e da infinito.