UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: E. Nörlund

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.5, p. 182–186.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_5_182_0>

SUNTI DI LAVORI ESTERI

N. E. NÖRLUND. — Sunto dei suoi lavori sul *Calcolo delle differenze finite* [1].

1. I grandi geometri del secolo XVIII si sono occupati ripetutamente del Calcolo alle differenze finite, considerandone lo studio come un complemento dell'Algebra superiore. Essi si urtavano però a difficoltà che lo stato dell'Analisi non permetteva loro di superare, e siccome l'attenzione dei matematici si rivolgeva ad altri argomenti, per un lungo periodo di anni il Calcolo delle differenze finite ha scarsamente progredito. È in un tempo recente che lo studio di questioni attraenti in questo campo è stato ripreso, dapprima e con successo per opera di H. POINCARÉ e di S. PINCHERLE, poi da non pochi altri analisti. In questo riassunto io esporrò brevemente alcuni risultati recenti sulle equazioni alle differenze finite, che definiscono una nuova classe di trascendenti uniformi tali da poter noverare fra le più notevoli dell'Analisi.

È noto che la serie di potenze è stata della massima utilita nella teoria delle equazioni differenziali. Ma essa si presta poco allo studio delle soluzioni delle equazioni alle differenze finite, poichè le serie di potenze che rappresentano tali soluzioni convergono in un dominio troppo ristretto e sono anche divergenti nei casi che per primi ci interessano. Di più, la formazione effettiva di queste serie richiede calcoli penosi che si possono schivare ricorrendo ad altri istrumenti analitici, quali *le serie di facoltà e le serie d'interpolazione*. Questi ultimi sviluppi sono creati quasi per rappresentare le funzioni che noi abbiamo a considerare. Una « serie di facoltà » [2] è della forma

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{x(x+1)\dots(x+s)}. \tag{1}$$

[1] Questi lavori sono quelli citati nei n.i 2, 4, 5, 6, 7, 8 delle note a piè di pagina.

[2] *Sur les séries de facultés.* Acta Math., T. 37 (1914), pp. 327-387.

Ponendo $x = \sigma + i\tau$, il dominio di convergenza di (1) è un semipiano $\sigma > \lambda$ limitato a sinistra dalla retta di convergenza $\sigma = \lambda$. La serie di facoltà converge uniformemente nel semipiano $\sigma \geq \lambda + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ se si escludono con cerchietti quelli fra i punti $0, -1, -2, \ldots$ interni al dominio di convergenza. Sia $R_n(x)$ il resto dopo n termini; da quanto si è detto, segue che $|x^{n+1} R_n(x)|$ rimane limitato se x tende all'infinito rimanendo nel semipiano $\sigma \geq \lambda + \varepsilon$. Il punto all'infinito è generalmente singolare per $f(x)$; la serie di facoltà esprime perciò l'andamento della $f(x)$, quando x tende al punto singolare $x = \infty$ nel modo accennato, con l'approssimazione che si desidera; pertanto, la serie (1) offre, in lati estesi, un mezzo per studiare il comportamento di una funzione analitica in vicinanza di questi punti singolari.

In generale, non v'è punto singolare sulla retta di convergenza $\sigma = \lambda$. Si sa trovare un numero reale α tale che $f(x)$ sia olomorfa e limitata nel semipiano $\sigma > \alpha + \varepsilon$, ma non nella striscia $\alpha + \varepsilon > \sigma > \alpha - \varepsilon$. Per brevità, si supponga α positivo: in generale, esso è minore dell'ascissa di convergenza λ. Per prolungare analiticamente la $f(x)$ definita dalla (1), si può trasformare questa serie in un'altra, della forma

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s \cdot s!}{(x+\rho)(x+\rho+1)\ldots(x+\rho+s)},$$

ρ essendo un numero positivo. L'ascissa di convergenza di questa serie è in generale minore di λ; è poi una funzione decrescente di ρ, tendente ad un limite finito per $\rho \to \infty$. In generale, è $\alpha < \lambda_\infty < \lambda_\rho < \lambda$. La serie (1) è sommabile mediante medie aritmetiche di ordine ρ nella striscia $\lambda_\rho < \sigma < \lambda$, ma non per $\sigma < \lambda_\rho$. Si dimostra che la $f(x)$ tende uniformemente ad un limite quando x tende all'infinito nel semipiano $\sigma \geq \alpha + \varepsilon$; lo stesso è di tutte le sue derivate rispetto ad $\frac{1}{x}$. Sembra così che nè λ, nè λ_ρ, nè λ_∞ siano in relazione semplice colle proprietà analitiche della $f(x)$. Ammettiamo che sia $\lambda_\infty > \alpha$. Per prolungare analiticamente la $f(x)$ fuori del semipiano $\sigma > \lambda_\infty$, si può trasformare la serie (1) in una della forma

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_s \cdot s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)} \quad (\omega > 1). \tag{2}$$

L'ascissa di convergenza $\lambda(\omega)$ di questa serie è sempre inferiore ad λ_∞, ed $\lambda(\omega)$ è una funzione decrescente di ω che tende ad α per $\omega \to \infty$. S. PINCHERLE [3] ha fatto uno studio approfondito degli integrali della forma

$$\int_0^1 t^{x-1} \varphi(t) dt,$$

dimostrando che la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione possa svilupparsi in serie di facoltà, è che essa sia rappresentabile da un integrale di questa forma, dove $\varphi(t)$ è olomorfa nell'interno del cerchio $|t-1|=1$ e di ordine finito sulla circonferenza. Si dimostra pure che ogni funzione che ammette uno sviluppo in serie di facoltà dà origine ad una serie

$$f(x) \backsim \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \ldots.$$

assolutamente sommabile mediante il metodo esponenziale di E. BOREL, ed inversamente la somma di una tale serie, al senso di BOREL, è una funzione che ammette uno sviluppo in serie di facoltà della forma (2).

2. Fra le serie d'interpolazione, mi limito a considerare la seguente [4]:

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (x-1)(x-2) \ldots (x-s). \tag{3}$$

Anche qui, il dominio di convergenza è un semipiano $\sigma > \lambda$ e la serie converge uniformemente in ogni campo finito interno al semipiano; ma mentre lo sviluppo (1) è unico, non è così per la serie (3): G. FROBENIUS ed S. PINCHERLE hanno dimostrato che esiste un'infinità di sviluppi dello zero della forma (3), dati da

$$c_1 \Psi_1(x) + c_2 \Psi_2(x) + \ldots + c_n \Psi_n(x),$$

$c_1, c_2, \ldots c_n$ essendo costanti arbitrarie, mentre è

$$\Psi_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{x-1}{s}, \quad \Psi_{r+1}(x) = \binom{x-1}{r} \Psi_1(x-r).$$

Aggiungendo alla (3) uno sviluppo dello zero convenientemente scelto, si può ottenere che l'ascissa λ di convergenza sia

(3) *Sur les fonctions déterminantes*, Ann. Éc. Norm., S. 3, T. 22 (1905), p. 9-68.

(4) *Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton*, Ann. Éc. Norm., S. 3, T. 39 (1922), p. 340-403, al T. 40 (1923), p. 35-54.

grande a piacere. Di questo inconveniente ci si può liberare come segue. Sia p il minimo intero positivo per cui $\Phi(x)$ è olomorfa per $\sigma > p$ e continua a destra in p. Dico che la serie è *ridotta* se si sono scelti i coefficienti a_s in modo che la somma della serie sia uguale al valore della funzione $\Phi(x)$ nei punti $x = p$, $p+1$, $p+2, \ldots$ In quanto segue, si parlerà sempre della serie ridotta. Se è $p > 1$, la serie dipende ancora da $p-1$ costanti arbitrarie, ma l'ascissa di convergenza λ di una serie ridotta è interamente determinata; essa dipende solo dalla $\Phi(x)$ ed è del resto la minima possibile: cioè se la (3) non è ridotta, la sua ascissa di convergenza è maggiore od uguale a quella della serie ridotta corrispondente.

S. PINCHERLE ha mostrato che vi è una relazione assai notevole fra la (3) e l'integrale di LAPLACE. Vi è pure una relazione notevole fra l'ascissa di convergenza della nostra serie e le proprietà analitiche della funzione corrispondente, contrariamente a quanto aveva luogo per la (1). Poniamo, per brevità,

$$\varphi(v) = \cos v \log(2\cos v) + v \operatorname{sen} v.$$

F. CARLSON ha mostrato che la $\Phi(x)$, definita dalla (3), soddisfa alla disuguaglianza

$$|\Phi(\gamma + re^{iv})| < e^{r\varphi(v)} \frac{(1+r)^{\lambda + \frac{1}{2} + \varepsilon(r)}}{\sqrt{1 + r\cos v}},$$

dove $\frac{\pi}{2} \geq v \geq -\frac{\pi}{2}$. Qui γ indica un numero maggiore dell'ascissa di convergenza λ, ed $\varepsilon(r)$ è una funzione che tende uniformemente a zero per $r \to \infty$.

Inversamente, sia $\Phi(x)$ una funzione analitica olomorfa nel semipiano $\sigma \geq \gamma$ e soddisfacentevi alla disuguaglianza

$$(4) \qquad |\Phi(\gamma + re^{iv})| < e^{r\varphi(v)} (1+r)^{\beta + \varepsilon(r)}$$

dove $\varepsilon(r)$ tende a zero per $r \to \infty$, uniformemente per $\frac{\pi}{2} \geq v \geq -\frac{\pi}{2}$. Questa funzione ammette uno sviluppo della forma (3), di cui l'ascissa di convergenza è non maggiore del maggiore fra i numeri γ e $\beta + \frac{1}{2}$.

La serie (3) determina la funzione $\Phi(x)$ nel semipiano $\sigma > \lambda$. Per averne il prolungamento analitico fuori di questo dominio, si può trasformare la serie (3) in una serie della forma

$$(5) \qquad \Phi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s (x+\rho-1)(x+\rho-2)\ldots(x+\rho-s).$$

L'ascissa di convergenza λ_ρ di questa serie è in generale minore di λ, ed è una funzione decrescente di ρ. Sia μ il limite inferiore dei numeri β pei quali è soddisfatta la (4) : $\mu = \mu(\gamma)$ è una funzione decrescente di γ, continua in ogni intervallo in cui è finita. Se è $\mu(\gamma) = -\infty$, la serie (5) converge per $\sigma > \gamma$. Se è $\mu(\gamma) > -\infty$, si sa trovare un numero γ_1 tale che per $\sigma \geq \gamma_1 + \varepsilon$, la funzione $\Phi(x)$ è olomorfa e la $\mu(\sigma)$ è limitata, mentre che una almeno di queste condizioni cessa di essere soddisfatta per $\sigma \geq \gamma_1 - \varepsilon$, per piccolo che sia il numero positivo ε. La conoscenza della funzione $\mu(\sigma)$ permette di assegnare limiti assai ristretti per l'ascissa di convergenza λ_ρ, e si dimostra che λ_ρ tende a γ_1 per $\rho \to \infty$. Onde ottenere il prolungamento analitico della funzione $\Phi(x)$ oltre il semipiano $\sigma > \gamma$, si può trasformare la serie (3) in una della forma

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-s\omega), \tag{6}$$

ω positivo. Si dimostra l'esistenza di un numero positivo ω_1 tale che questo sviluppo vale per $0 < \omega < \omega_1$, ma non per $\omega > \omega_1$. È molto notevole il fatto che per $0 < \omega < \omega_1$, l'ascissa di convergenza $\lambda(\omega)$ della (6) è determinata univocamente quando sia noto l'ordine di grandezza della $\Phi(x)$. Infatti, se σ è abbastanza grande, si può trovare un numero positivo k tale che

$$|\Phi(\sigma + i\tau)| = O(e^{k|\tau|}).$$

Sia ξ il limite inferiore dei numeri k pei quali questa uguaglianza è soddisfatta; $\xi = \xi(\sigma)$ è una funzione di σ positiva, decrescente, continua e convessa. Si sa trovare un numero reale α tale che per $\sigma \geq \alpha + \varepsilon$ la $\Phi(x)$ sia olomorfa, e la $\xi(\sigma)$ sia limitata superiormente, mentre una almeno di queste condizioni non vale più per $\sigma > \alpha - \varepsilon$, per piccolo che sia il numero positivo ε. Ciò posto, l'ascissa di convergenza $\lambda(\omega)$ è determinata univocamente dall'equazione

$$\xi(\lambda(\omega)) = \frac{\pi}{2\omega}, \quad 0 < \omega < \omega_1$$

e si dimostra che $\lambda(\omega)$ decresce insieme ad ω. Tendendo ω a zero, $\lambda(\omega)$ tende al numero α.

La condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\Phi(x)$ ammetta uno sviluppo della forma (6), è che esista un numero reale α tale che $\Phi(x)$ sia olomorfa nel semipiano $\sigma > \alpha$ e vi soddisfi alla disuguaglianza

$$|\Phi(x)| < \text{cost.}\, e^{k|x|},$$

k essendo un numero positivo. *(continua*