Bollettino
Unione Matematica
Italiana

UMI

Recensioni

* A. Hurwitz: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Functionen e R. Courant: Geometrische Funktionentheorie
* L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen
* G. Castelnuovo: Spazio e tempo, secondo le vedute di Einstein
* Hermann Weyl: Mathematische Analyse des Raumproblems
* S. Pincherle; Gli elementi della teoria delle funzióni analitiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.5, p. 187–194.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_5_187_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

RECENSIONI

Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, von A. HURWITZ, herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über *Geometrische Funktionentheorie* von R. COURANT, di pag. XI+399 (Berlin, Julius Springer, 1922).

Con questo trattato sulle funzioni di variabile complessa un altro bel volume si aggiunge alla collezione *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, di cui la casa Springer ha recentemente iniziata la pubblicazione.

Di varia indole sono i pregi che, nelle varie parti del libro, fermano l'attenzione del lettore, e quasi lo compensano per una certa quale mancanza di coesione fra le varie parti, che egli talvolta si sentirebbe portato a notare. Due Autori, e due esposizioni ci stanno innanzi; due esposizioni diverse non solo per l'indirizzo, ma anche per la elaborazione della materia esposta; nè ciò può sorprendere, l'una delle due essendo maturata attraverso una tradizione letteraria e didattica assai più larga che non l'altra.

Delle tre parti in cui l'opera si divide, le due prime sono tratte, pressochè integralmente, dai manoscritti nei quali l'HURWITZ preparava le sue lezioni, curando in essi, secondo quanto ci dice il COURANT, anche i più minuti particolari della forma esteriore. La prima parte è dedicata alle funzioni analitiche in generale, la cui teoria è esposta, nelle sue linee essenziali, secondo WEIERSTRASS. Nè in essa, nè nella successiva seconda parte, nella quale vengono studiate le funzioni ellittiche secondo lo stesso indirizzo, è dunque da cercare novità di risultati o di metodi. Ma la nitidezza dell'esposizione, la visione sintetica dell'insieme e nello stesso tempo l'accuratezza minuziosa in ogni singolo punto, faranno salutare a tutti come benvenute queste Lezioni dell'HURWITZ, che, in una parola, hanno tutti i pregi che si potevano attendere da un tale Autore.

La natura della materia trattata ci dispensa da un esame particolareggiato delle due prime parti. Ci basterà dire che la prima (pp. 1-131) prende le mosse dalla definizione stessa dei numeri complessi, e che, oltre a cinque capitoli dedicati alle serie di potenze e alle funzioni analitiche in generale, contiene, radunate in un apposito capitolo, quelle nozioni sulle funzioni meromorfe che occorrono nella teoria delle funzioni ellittiche. A queste, come si è detto, è dedicata la parte seconda (pp. 132-244): in essa sono introdotte anzitutto la funzione p di WEIERSTRASS, insieme con la ζ e con la σ, poi le θ, e infine le funzioni ellittiche di JACOBI. Vi sono pure svolti i primi elementi della teoria delle funzioni modulari ellittiche fino a dedurne l' esistenza di una funzione p con invarianti assegnati. Nè manca, fra altro, un capitolo destinato agli elementi della teoria della trasformazione (trasformazioni lineari di 2° ordine, trasformazione di LANDEN).

Completamente di mano del COURANT è invece la terza parte (pp. 245-392), dedicata allo svolgimento della teoria delle funzioni dal punto di vista riemanniano, ó geometrico: al COURANT stesso, del resto, appartiene la paternità di alcune fra le cose che in questa terza parte si trovano esposte. La parte più elementare della teoria è svolta nel secondo capitolo, dopo un primo capitolo introduttivo: il terzo capitolo studia, a mo' d'esempio, le funzioni analitiche più elementari, e le rappresentazioni conformi cui esse dànno luogo. Altri esempi meno elementari di rappresentazioni conformi contiene il capitolo successivo: così quella del rettangolo sul semipiano, per mezzo dell' integrale ellittico di prima specie di LEGENDRE, e quella di un poligono, con particolare riguardo al caso del triangolo. Nello stesso tempo il COURANT trova l' occasione di enunciare, limitandosi provvisoriamente alle aree piane semplicemente connesse, il teorema fondamentale di RIEMANN sulla rappresentazione conforme, e di indicarne qualche applicazione.

Ma il capitolo più notevole è il quinto, e ultimo, che occupa da solo circa una metà della terza parte. Esso è anzitutto dedicato a stabilire la possibilità di rappresentare conformemente una qualsiasi area piana n volte connessa su un piano reso dello stesso ordine di connessione mediante n tagli paralleli. Dopo avere mostrato la plausibilità dell' enunciato in base alla sua interpretazione fisica, il COURANT passa alla dimostrazione rigorosa: questa avviene, conformemente alla scuola di HILBERT, attraverso un problema di minimo, la cui soluzione conduce a costruire la parte reale della funzione di variabile complessa, che fornisce la rappresentazione richiesta. Il risultato viene poi completato da vari punti di vista. Anzitutto — mentre prima l'area era considerata come aperta — viene studiato il modo di comportarsi, nella rappresentazione, del suo contorno, con particolare riguardo a quei punti del contorno che sono accessibili (estremi di linee continue, i cui punti residui sono tutti interni). In seguito, la natura stessa dell' area viene assoggettata a condizioni meno restrittive, ammettendosi che, anzichè di un solo, possa constare di più fogli sovrapposti, in numero finito o infinito, con un ordine di connessione finito o anche infinito, purchè si tratti sempre di un' area spezzata in due parti da ogni contorno chiuso tracciato su di essa: la rappresentazione conforme avviene sempre su un piano (a un solo foglio) con tagli paralleli. In questo risultato è contenuto il principio generale di uniformizzazione del KOEBE. Effettivamente, dopo essersi intrattenuto brevemente sulle superficie di RIEMANN per il caso algebrico e sui relativi teoremi di esistenza, il COURANT espone come quel principio conduca alla soluzione del problema della uniformizzazione delle funzioni algebriche, o più in generale analitiche, mediante funzioni automorfe. Ma ancora dell' altro contiene questo capitolo: computi di moduli, sostituzione a quella sopra indicata di altre rappresentazioni conformi canoniche, ecc., ecc.

In una mole esigua, il libro che succintamente analizziamo contiene dunque una grande copia di materia: esso sarà certo molto utile ai nostri studenti, che vi impareranno a conoscere le correnti di pensiero attraverso le quali è venuta sino ad oggi maturando la teoria delle funzioni di variabile complessa. Il risultato non sarà forse ottenuto senza un certo sforzo da parte loro, sia per l' elevatezza di qualche parte, sia per la necessità di riavvicinare ciò che nel testo appare talvolta come diviso. Essi poi, e non essi soltanto, avranno tra altro il mezzo di apprezzare, in un' esposizione di insieme, la potenza e la fecondità dei metodi [1] elaborati dalla scuola di HILBERT per richiamare in vita il principio di DIRICHLET.

ALESSANDRO TERRACINI

Dinanzi all' importanza e al valore del libro, sarebbe pedanteria soffermarsi su alcune lievi disformità che mi pare di riscontrare nel testo: p. es. sulla nota a pag. 12 e sulla insufficiente coordinazione fra le pagine 21 e 108.

L. BIEBERBACH. — *Theorie der Differentialgleichungen* (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzedarstellungen, Band. VI, I. Springen, Berlin, 1923).

Il libro che il signor BIEBERBACH ha pubblicato sulle equazioni differenziali non è un vero trattato, come dice anche l'A.

[1] In buona parte iniziati da matematici italiani. (*Nota dell'U. M. I.*).

nella prefazione, ma certamente è un'opera in cui, da un punto di vista moderno, vengono trattate e felicemente disposte le parti più fondamentali e più interessanti della vasta e fondamentale teoria, corredate da belle applicazioni.

È diviso in quattro parti.

L'A., nella prima parte, espone la teoria delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine; e, dopo aver risoluto alcuni classici esempi, studia i metodi d'integrazione (metodo delle successive approssimazioni, metodo di CAUCHY, ecc.), le curve integrali, le equazioni differenziali in campi complessi, ecc.

Nella seconda parte tratta delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, e così studia queste equazioni in campi complessi, le curve integrali, l'equazione di BESSEL, le equazioni di FUCHS, l'equazione ipergeometrica, i polinomi di LEGENDRE, ecc.

Nella terza parte tratta delle equazioni differenziali parziali del primo ordine con applicazioni, e nell'ultima di quelle del secondo ordine, e così studia l'equazione di MONGE-AMPÈRE, le equazioni lineari, le equazioni iperboliche, le equazioni ellittiche e quelle paraboliche.

La chiarezza della esposizione e la semplicità dello stile rendono facile la lettura di questo libro, lettura che potrà riuscire molto utile ai nostri studenti di matematica. *g. b.*

G. CASTELNUOVO — *Spazio e tempo, secondo le vedute di Einstein.* « Attualità scientifiche », n. 31. Bologna, N. Zanichelli, 1923.

Con questo volumetto il chiarissimo autore pubblica in miglior veste e con maggior ampiezza di sviluppo le due conferenze che fece l'anno scorso all'Associazione elettrotecnica italiana in Roma, e che furono già da noi segnalate ai lettori in un numero di questo Bollettino.

Forse nessun libro italiano riuscirà più utile di questo a coloro che, pur non possedendo appieno l'alto strumento matematico, vogliono e possono per il loro grado di cultura acquistare un'idea esatta delle concezioni di EINSTEIN e delle grandiose sintesi a cui esse conducono.

Invero, tutto vi è spiegato con precisione matematica, ma senza soverchio uso del tecnicismo di questa scienza: con chiarezza e copia di ben scelte immagini, senza quelle astruse dissertazioni astratte o divagazioni sensazionali, che si leggono, purtroppo, in altre opere di divulgazione.

È in sostanza una fedele interpretazione e un felice commento dell'originale libretto di EINSTEIN pubblicato dalla stessa Ditta due anni fa; il quale, per quanto di tono elementare, non riesce a tutti di facile lettura, senza qualche complemento ed illustrazione. *p. b.*

Lick Observatory Bulletin. — Number 346 (1923).

Profonda fu l'impressione suscitata nei circoli scientifici dall'annuncio che le osservazioni dell'ultima eclisse solare confermavano pienamente la teoria e i calcoli di EINSTEIN, intorno alla flessione della luce prodotta dal campo gravitazionale del sole.

Tali osservazioni e le relative deduzioni, dovute agli astronomi della WM. H. CROCKER *Eclipse Expedition to Wallal* (*Western Australia*), sono ora comparse nel Bollettino sopra citato. Così ogni studioso potrà prendere esatta conoscenza del magnifico lavoro compiuto e dell'importanza grandissima dei risultati; e potrà farsi un'opinione sull'attendibilità della teoria Einsteiniana a questo riguardo.

Probabilmente i fautori della teoria della relatività troveranno qui nuovo motivo al loro entusiasmo, e gli avversari nuova materia ai loro dubbi. E dubbi ne nascono effettivamente. Colpisce anzitutto la grande irregolarità degli spostamenti delle immagini, che variano senza legge apparente non solo in grandezza, ma in direzione e verso. Anche le luci di stelle fra loro vicinissime o ugualmente distanti dal sole hanno manifestato perturbazioni differenti e talora persino di senso opposto. Si osserva inoltre che la luce che attraversò la corona subì spostamenti più regolari di quella che passò al di fuori; contrariamente a quanto era da aspettarsi. Se dunque si giudicano accettabili nel loro complesso questi risultati dell'osservazione, parrebbe ben naturale dedurne che esistono intorno al sole ignote azioni perturbatrici più ragguardevoli di quella presagita da EINSTEIN.

Perciò la media degli spostamenti non rappresenterebbe puramente la deflessione di EINSTEIN; e la miracolosa coincidenza, che si è trovata in tal modo fra il dato dell'osservazione e quello della teoria, starebbe piuttosto contro la teoria stessa che in suo favore.

Comunque sia, l'importantissimo fatto messo ormai fuori di dubbio, ed ottenuto con mirabili sforzi in seguito alle vedute di EINSTEIN, è questo: quando un raggio di luce passa vicino al sole, subisce un'incurvamento apprezzabile coi nostri mezzi d'osservazione. Forse un giorno, da una gran copia di simili osservazioni e dal loro accurato studio, si potrà discernere la varia natura delle perturbazioni, e stabilire se una fra quelle possa veramente essere attribuita al campo gravitazionale. *p. b.*

Dott. HERMANN WEYL. — *Mathematische Analyse des Raumproblems.* Berlin, Springer, 1923.

Questo piccolo libro (pag. 112) contiene quasi intieramente le lezioni che il dott. WEYL ha tenuto prima nel febbraio 1922 per invito del consiglio di Pedagogia del Mancomunitat de Catalunya nell'Istituto di Studi Catalani in Barcellona e poi per invito della Facoltà di Scienze nell'Università di Madrid.

Nella prima lezione tratta del problema dello spazio in relazione alla matemàtica ed alla filosofia matematica.

Nella seconda, terza e quarta lezione dà una rapida ricapitolazione delle basi della geometria infinitesimale caratterizzando la geometria euclidea.

Nelle seguenti lezioni tratta i fondamentali della geometria spaziale, secondo il punto di vista di EUCLIDE e di HELMOLTZ (quinta e sesta lezione) secondo il quale la struttura metrica è assoluta ed a priori; poi, secondo il punto di vista di RIEMANN-EINSTEIN (settima ed ultima lezione), per il quale codesta struttura è relativa, variabile ed a posteriori.

Nell'aggiunta (pp. 62-115) l'Autore completa varî paragrafi delle lezioni con sviluppi particolari sulla teoria della integrabilità delle equazioni differenziali totali, sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni ecc. (¹).

S. PINCHERLE. — *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche.* Bologna, N. Zanichelli, 1922.

L'Italia, a differenza di altre nazioni, possiede finora purtroppo ben pochi trattati sopra teorie di matematica superiore, per quanto, fortunatamente, siano ottimi quei pochi che ha. Ad accrescere questo minuscolo numero ha provveduto la Ditta editrice Zanichelli col pubblicare recentemente alcune importanti opere che, oltre a portar lustro al nostro paese, contribuiranno efficacemente alla elevazione della cultura matematica della nostra gioventù studiosa. Il fatto poi che codeste opere si siano pubblicate in un periodo di crisi eccezionale per l'industria libraria di quasi tutta l'Europa, è un sintomo confortante e beneaugurante per il riassetto postbellico ed il risorgimento della nazione; io lo considero un atto di fede degli scienziati italiani.

Il prof. PINCHERLE pubblica la prima parte della Teoria delle funzioni analitiche, a cui dovrebbe seguirne un'altra « se

(¹) Vedi *Einzigartigkeit der Pythagorischen Massbestimmung.* Math. Zeitschr., T. XII, p. 114; WEYL. *Raum, Zeit, Materie,* Spinger, Berlin (1921).

pure » Egli dice « l'età e le forze dell'Autore gliene consentiranno la redazione ». La forte ed infaticabile tempra del Maestro dà sicuro affidamento che Egli possa compiere l'opera iniziata; al che fanno voti non solo i numerosi suoi antichi e recenti scolari che appresero nella Scuola ad amarlo, ma quanti hanno a cuore il progresso della scienza italiana.

Cultore appassionato di queste teorie fino dalla gioventù — chi non ricorda quell'elegante e perspicua introduzione allo studio delle funzioni analitiche secondo le idee del WEIERSTRASS, nel « Giornale di Battaglini » dell'82? — il PINCHERLE era il più naturalmente indicato a darci questo corso di lezioni destinato a dare ai giovani che si propongono di proseguire negli studi « la preparazione necessaria ad orientarsi in mezzo alla vasta, varia ed ognora crescente produzione che riguarda direttamente la Teoria delle funzioni analitiche » e ad appagare il desiderio di quelli che si dedicano all'insegnamento medio « di fondare la loro istruzione matematica su basi larghe e sicure » e « di venire a cognizione di quei capitoli più elevati della scienza senza la cui conoscenza la parte elementare non può prospettarsi nella sua vera luce » proprio in quello fra gli accennati capitoli, « che è forse il più utile, il più interessante e il più completo ».

Al raggiungimento del duplice intento l'A. giunge con la consueta chiarezza e col consueto rigore e con quella che è una delle sue doti preminenti: la limpida concisione, che gli permette in un spazio relativamente breve di rinchiudere gran numeri di risultati. Si aggiunga poi che l'esposizione trasporta il lettore da alcuni semplici richiami degli elementi studiati nel primo biennio universitario fino a teorie elevate, con una così armonicamente graduale elevazione che par quasi che spontaneamente sorgano i successivi sviluppi e non si avvertano le crescenti difficoltà.

Ho creduto utile, in ispecie per quei giovani a cui l'A. dedica in particolar modo l'opera sua, di dare non un arido indice del libro, ma un ampio resoconto.

Nel Cap. I, fatto un cenno ai numeri a più unità, allo scopo di far vedere che gli ordinari numeri complessi costituiscono il più ampio campo di numeri su cui si opera colle regole dell'usuale aritmetica, è ricordata la rappresentazione dei numeri complessi sul piano-sfera e sulla sfera. Sono poi studiate alcune trasformazioni della variabile complessa: le sostituzioni lineari, la riflessione rispetto all'asse reale ed il prodotto di queste trasformazioni.

Nel Cap. II si danno definizioni sugli aggregati di numeri complessi, di aerea connessa, di taglio, di ordine di connessione. Ricordate la definizione di funzione reale o complessa di variabile complessa e della loro continuità, e la loro rappresentazione grafica, seguono le definizioni e le proprietà fondamentali degli integrali di una funzione lungo una curva rettificabile del piano complesso. Definita la derivata come limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento, quando esiste indipendentemente dalla direzione in cui va a zero l'incremento, e detta *monogena* una funzione se ha derivata, si deducono le condizioni di monogeneità. È fatto vedere che la corrispondenza fra i punti dei piani (x) e (y) stabilita da $y = f(x)$, ove $f(x)$ è monogena, è conforme e viceversa se la corrispondenza $\xi = \xi(u, v)$, $\eta = \eta(u, v)$ è conforme, una delle due funzioni $\xi + i\eta$, $\xi - i\eta$ è funzione monogena di $u + iv$.

Nel Cap. III, ricordata la definizione di cerchio di convergenza di una serie di potenze, si dimostra il teorema di CAUCHY-HADAMARD relativo alla determinazione del raggio di codesto cerchio; si considerano serie di potenze negative e si definisce la calotta di convergenza di tali serie. Si stabiliscono poi gli sviluppi di TAYLOR e di MAC-LAURIN, mediante i quali si definiscono le serie dedotte da una data serie $p(x)$ relative a punti del cerchio (r) di convergenza e la continuazione analitica della funzione rappresentata entro (r) da $p(x)$. Seguono alcuni teoremi sopra gli sviluppi dedotti immediatamente o mediatamente da $p(x)$. Definendo con elementi di una stessa funzione analitica una serie $\Sigma a_n (x - \alpha)^n$ e tutti gli sviluppi dedotti da questa immediatamente o mediatamente, si dice, secondo WEIERSTRASS, *funzione analitica* l'insieme degli elementi che si possono dedurre da un elemento dato. *Campo di regolarità* di una funzione analitica è la parte del piano-sfera costituito dai punti interni ai cerchi di convergenza dei vari elementi; i punti del contorno di quest'area sono i punti *singolari*. Seguono i concetti di funzione *uniforme* e *multiforme*, di funzione *monodroma* o *polidroma* in un'area.

F. SIBIRANI

(continua)