# Bollettino Unione Matematica Italiana



Enrico Bompiani


# Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **3** (1924), n.1, p. 10–16.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_1_10_0¿

## Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario.

Nota di E. BOMPIANI

**1.** Sia data in ogni punto generico $P$ di una superficie generica $\sigma$ una retta, passante per $P$ ma non giacente nel piano ivi tangente.

Alla congruenza di rette assegnata si può associare un sistema $\infty^2$ di linee dotato di questa proprietà: il piano osculatore ad una qualsiasi di esse in $P$ contiene la retta della congruenza passante per $P$. È chiaro infatti che dato $P$ ed una tangente ivi a $\sigma$ la condizione precedente individua il piano osculatore in $P$ alla curva del sistema che vi passa con la tangente data. A questo sistema di $\infty^2$ linee [1] dò il nome di ***sistema assiale associato alla congruenza data.***

L'equazione differenziale del 2° ordine del sistema assiale associato ad una data congruenza è subito trovata.

Supponiamo $\sigma$ non sviluppabile, e assumiamo su di essa come linee coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ le linee asintotiche dei due sistemi (distinti per ipotesi). Le coordinate proiettive omogenee

[1] Sistemi siffatti sono già stati notati da G. FUBINI: *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* (Atti R. Acc. di Torino, 1918, p. 1035). La loro importanza per una corrispondenza qualsiasi fra due superficie è messa in evidenza in una mia Nota: *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme.* (Rendic. R. Acc. dei Lincei, 1923).

$x_i (i = 0, 1, 2, 3)$ dei suoi punti sono soluzioni di un sistema di equazioni a derivate parziali

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uu} = b_1 x_u + c_1 x_v + d_1 x \\ x_{vv} = b_2 x_u + c_2 x_v + d_2 x \end{cases}$$

essendo $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \ldots,$ e $b_r$, $c_r$, $d_r$ funzioni di $u$, $v$ soddisfacenti alle condizioni d'integrabilità del sistema (1).

Dopo ciò, se si pone

$$\Psi = |X, x, x_u, x_v|, \quad \Psi_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \quad \Psi_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|$$

(ove i simboli a 2° membro denotano determinanti ottenuti apponendo alle coordinate correnti $X$ e alle coordinate $x$ gli indici 0, 1, 2, 3), l'equazione del piano osculatore in $P(u, v)$ alla curva $v = v(u)$ è

$$(c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v'')\Psi + 2v'(\Psi_1 + v'\Psi_2) = 0.$$

Se assegniamo la congruenza dando le equazioni $h_1\Psi + \Psi_1 = 0$, $h_2\Psi + \Psi_2 = 0$ di una sua retta, essendo $h_1 = h_1(u, v)$ e $h_2 = h_2(u, v)$ funzioni note, l'equazione differenziale delle linee assiali associate alla congruenza è

$$(2) \qquad v'' = b_2 v'^3 + (2h_2 - c_2)v'^2 + (2h_1 + b_1)v' - c_1.$$

**2.** Dato sulla superficie un doppio sistema $\infty^1$ di linee (diverse dalle asintotiche), p. es. un doppio sistema coniugato, è chiaro ch'esso determina un sistema assiale: basta infatti considerare in ogni punto $P$ di $\sigma$ la retta intersezione dei piani osculatori alle due linee del sistema passanti per $P$; il sistema assiale associato alla congruenza di rette ora costruita è individuato dal sistema dato e, per costruzione, ne contiene le sue linee.

Viceversa: dato un sistema $\infty^2$ di linee assiali, è possibile scegliere entro di esso due sistemi $\infty^1$ di linee formanti un doppio sistema coniugato? La risposta, come si prevede facilmente, è in generale negativa: perchè il sistema assiale dipende, come la congruenza a cui è associato, da due funzioni arbitrarie di $u$, $v$: mentre i sistemi coniugati dipendono da una sola funzione di $u$, $v$. Vale quindi la pena di ricercare quando ciò sia possibile.

Se $v' = M(u, v)$ è l'equazione di un sistema $\infty^1$ di linee l'equazione del sistema coniugato (essendo $\sigma$ riferita alle sue asintotiche) è $v' = -M(u, v)$. Affinchè questi due sistemi siano integrali di (2) deve aversi

$$
(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial u} + M\dfrac{\partial M}{\partial v} = b_2 M^3 + (2h_2 - c_2)M^2 + (2h_1 + b_1)M - c_1 \\[2ex] -\dfrac{\partial M}{\partial u} + M\dfrac{\partial M}{\partial v} = -b^2 M^3 + (2h_2 - c_2)M^2 + (2h_1 + b_1)M - c_1 ; \end{cases}
$$

e da queste risulta che data $M \neq 0$ sono sempre determinate univocamente $h_1$ e $h_2$ (cioè è determinata la congruenza), mentre date $h_1$, $h_2$ non sarà sempre possibile trovare funzioni $M$ soddisfacenti alle (3).

Conseguenze immediate delle (3), ad esse equivalenti, sono

$$
(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial M^2}{\partial u} = 2b_2(M^2) + 2(2h_1 + b_1)M^2 \\[2ex] \dfrac{\partial M^2}{\partial v} = 2(2h_2 - c_2)M^2 - 2c_1 \end{cases}
$$

le quali mostrano, come dev'essere, che il problema dipende solo da $M^2$. La condizione d'integrabilità, tenuto conto che per l'integrabilità delle (1) è $b_{1/v} = c_{2/u}$, si scrive:

$$
(5) \quad \begin{aligned} \{ b_{2/v} + 2b_2(2h_2 - c_2) \} M^4 + 2 \{ h_{1/v} - h_{2/u} + b_{1/v} - 2c_1 b_2 \} M^2 + \\ + c_{1/u} - 2c_1(2h_1 + b_1) = 0. \end{aligned}
$$

Per discutere a fondo questa condizione conviene distinguere tre casi: $\sigma$ non è rigata; $\sigma$ è semplicemente rigata; $\sigma$ è una quadrica rigata.

**3.** Se $\sigma$ non è rigata conviene ricorrere alla normalizzazione di Fubini [1] delle coordinate proiettive: con essa

$$
b_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}, \quad c_1 = \beta ; \qquad b_2 = \gamma, \quad c_2 = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}
$$

($\beta$ e $\gamma$ figurano nelle forme normali di Fubini $\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv$, $\varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3)$ che individuano $\sigma$ a meno di applicabilità proiettive). La (5) si trascrive

$$
(5') \quad \begin{aligned} \gamma \left\{ 4h_2 - \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} \right\} M^4 + 2 \left\{ h_{1/v} - h_{2/u} + \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \, \partial v} - 2\beta\gamma \right\} M^2 - \\ - \beta \left\{ 4h_1 + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \right\} = 0. \end{aligned}
$$

(1) V. Fubini, l. c., p. 1034.

Questa mostra, secondo il previsto, che data ad arbitrio la congruenza, nel sistema assiale associato ad essa non esiste in generale alcun doppio sistema coniugato: potrebbe però esservene uno o due se una o due delle funzioni $M^2$ ricavate dalla (5′) soddisfacessero al sistema (4).

Più interessante è vedere quando la (5′) risulta identicamente soddisfatta rispetto ad $M^2$: in tal caso tutte le curve del sistema assiale si possono associare a coppie in $\infty^1$ sistemi doppi coniugati; questi $\infty^1$ sistemi si ottengono allora, integrando le (4), in relazione al valore arbitrario di $M^2$ da darsi in un punto di $\sigma$ per determinare un integrale delle (4).

Se ciò accade (essendo $\beta$ e $\gamma \neq 0$) deve aversi

$$h_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}, \quad h_1 = -\frac{1}{4}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}$$

$$-\frac{2}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} = -16.$$

Il 1° membro di quest'ultima relazione (doppio della curvatura totale di $\varphi_2$) si chiama con Fubini [1] curvatura media proiettiva della superficie.

La retta della congruenza, determinata in $P$ da $h_1$, $h_2$, congiunge il punto $x$ al punto $x_{uv} - \frac{1}{4}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} x_u - \frac{1}{4}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} x_v$: ma questa retta, nelle coordinate normali di Fubini, è lo spigolo di Green relativo a $P$; sicchè:

*Data una superficie generica (non rigata) $\sigma$ ed un sistema di linee assiali su di essa questo sistema non contiene, in generale, doppi sistemi coniugati: può contenerne al più uno o due; a meno che tutte le linee assiali si possano distribuire in $\infty^1$ sistemi coniugati, nel qual caso $\sigma$ è a curvatura proiettiva media $= -16$, e la congruenza alla quale quel sistema assiale è associato è la congruenza degli spigoli di* Green *uscenti dai punti di $\sigma$.*

Una volta accertato che $\sigma$ è a curvatura costante si può sempre dare a $\varphi_2$ la forma $\varphi_2 = \frac{du dv}{2(u+v)^2}$ cioè $\beta\gamma = \frac{1}{4(u+v)^2}$; ciò fatto il sistema da integrare in $M^2$ diviene

$$\frac{\partial \beta M^2}{\partial u} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(u+v)^2}, \quad \frac{\partial \gamma M^2}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(u+v)^2}$$

[1] V. Fubini, l. c., p. 1038.

e questo s'integra immediatamente dando

$$v'^2 = M^2 = 2\beta(u+v)\frac{c-v}{c+u} = \frac{1}{2\gamma(u+v)}\frac{c-v}{c+u}$$

ove comparisce la prevista costante arbitraria $c$.

Eliminando $c$ fra questa equazione e la sua derivata si ottiene

$$v'' = \gamma v'^3 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \gamma}{\partial v} v'^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta}{\partial u} v' - \beta$$

che è appunto l'equazione differenziale del sistema assiale associato alla congruenza degli spigoli di GREEN, come risulta da (2).

4. Esaurita la discussione nel caso di una superficie generica passiamo ad esaminare il caso di una superficie rigata (ma non quadrica). Nelle (1) può supporsi p. es. $c_1 = 0$ ma $b_2 \neq 0$.

Conviene considerare la rigata come descritta dal punto $x_i = y_i(v) + uz_i(v)$; $y_i$ e $z_i$ sono soluzioni di un sistema di equazioni a derivate ordinarie del 2° ordine che può, con opportuna normalizzazione, ridursi alla forma canonica del WILCZYNSKI (¹)

$$\begin{cases} y'' = -q_{11}y - q_{12}z \\ z'' = -q_{21}y + q_{11}z \end{cases} \qquad q_{ik} = q_{ik}(v)$$

e in conseguenza il sistema (1) si riduce al tipo

$$(1'') \qquad \begin{cases} x_{uu} = 0 \\ x_{vv} = (u^2 q_{21} + 2q_{11}u - q_{12})x_u - (q_{11} + uq_{21})x \end{cases}$$

cioè $b_1 = c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $b_2 = q_{21}u^2 + 2q_{11}u - q_{12}$.

Con ciò la (5), scartata la soluzione $M^2 = 0$, diviene

$$(5'') \qquad b_2\left(\frac{\partial \log b_2}{\partial v} + 4h_2\right)M^2 + 2(h_{1|v} - h_{2|u}) = 0,$$

essa è identicamente soddisfatta, rispetto ad $M^2$, per

$$h_2 = -\frac{1}{4}\frac{\partial \log b_2}{\partial v}; \quad h_1 = -\frac{1}{4}\frac{\partial \log b_2}{\partial u} + U(u);$$

sicchè comunque si scelga $U(u)$, funzione arbitraria, la retta della

(¹) E. J. WILCZYNSKI: *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces.* (Teubner, 1906), p. 116.

congruenza passante per il punto $x = y + uz$ sta sempre nel piano di equazione (posto $q'_{ik} = dq_{ik}/dv$)

$$0 = |X, y + uz, y' + uz', (q'_{21}u^2 + 2q'_{11}u - q'_{12})z + 4(q_{21}u^2 + 2q_{11}u - q_{12})z'|.$$

Al variare del punto $x$ sulla generatrice, cioè di $u$, questo piano oscula una cubica sghemba: due piani osculatori ad essa sono i piani tangenti alla rigata nei punti flecnodali della generatrice (definiti da $q_{21}u^2 + 2q_{11}u - q_{12} = 0$): di più le tangenti alla cubica giacenti in questi due piani vanno a passare per i loro punti di contatto con la rigata (mentre in generale, cioè fino a che i due punti flecnodali sono distinti, il punto d'osculazione di uno di questi piani con la cubica è distinto dal suo punto di contatto con la rigata). Riassumendo:

*Data una superficie rigata (non quadrica) esistono su di essa infiniti sistemi assiali, dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile, composti ciascuno di $\infty^1$ sistemi doppi coniugati. Le rette delle congruenze, che segano sulla rigata questi sistemi assiali, passanti per un punto stanno in un piano: al variare del punto sopra una generatrice questo piano oscula una cubica sghemba.*

Come si vede questa ricerca *mette in evidenza per ogni generatrice un determinato tetraedro ad essa legato in modo invariantivo* (e che potrebbe servire alla normalizzazione delle coordinate) i cui vertici sono: i due flecnodi della generatrice e i punti d'osculazione della cubica con i due piani tangenti flecnodali.

Fanno eccezione a quanto s'è ora detto le sole rigate per le quali risulta $h_2 = \frac{\partial b_2}{\partial v} = 0$, cioè per le quali $q_{11}$, $q_{12}$, $q_{21}$ siano costanti; in tal caso quei piani formano fascio e $y$ e $z$ sono soluzioni di una sola equazione $t^{IV} = (q_{11}^2 + q_{12}q_{21})t$ che s'integra immediatamente.

In ogni caso, se le funzioni $h_1$, $h_2$ si scrivono nella forma

$$h_1 = -\frac{1}{4}\frac{\partial \log (b_2\Omega')}{\partial u}, \quad h_2 = -\frac{1}{4}\frac{\partial \log (b_2\Omega')}{\partial v}$$

essendo $\Omega'(u) = \frac{d\Omega(u)}{du}$ assegnata a piacere, gli $\infty^1$ sistemi coniugati appartenenti al sistema assiale così determinato si ottengono integrando l'equazione differenziale

$$v'^2 = -\frac{1}{2}\frac{\Omega'}{\Omega + c}\frac{1}{b_2}$$

ove $\Omega$ è una qualunque funzione primitiva di $\Omega'$, e ove s'è posta in evidenza la costante arbitraria $c$.

Si verifica facilmente che l'eliminazione di $c$ fra questa equazione e la sua derivata riproduce l'equazione del sistema assiale data da (2).

**5.** Se infine la superficie $\sigma$ è una quadrica, nella (1) è $c_1 = b_2 = 0$; in tal caso se la (5) è soddisfatta per un $M^2 \neq 0$ è soddisfatta identicamente ed è $\frac{\partial h_1}{\partial v} = \frac{\partial h_2}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v}$ ove $h$ è una qualsiasi funzione di $u$, $v$. Ciò significa che *se ad un sistema assiale appartiene un doppio sistema coniugato, tutte le sue curve si possono distribuire in $\infty^1$ sistemi doppi coniugati*; e questi sistemi assiali dipendono da una funzione arbitraria di due variabili.

Fissata $h(u, v)$ i sistemi coniugati contenuti nel sistema assiale da essa definita sono dati dall'equazione $v'^2 = h^4 + c$.

Viceversa: *se sopra una superficie esistono infiniti sistemi assiali* (dipendenti da una funzione arbitraria di due variabili) *tali che le $\infty^2$ curve di ciascuno di essi si possano distribuire in $\infty^1$ doppi sistemi coniugati, la superficie è necessariamente una quadrica.*

È chiaro che basta accertare l'esistenza di *tre* di questi sistemi assiali purchè le rette delle tre congruenze passanti per un punto della superficie non stiano in un piano.

*Bologna, dicembre 1923.*