Eugenio Giuseppe. Togliatti

A proposito del "teorema degli intorni circolari,,

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.1, p. 16–18.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_1_16_0¿

A proposito del “ teorema degli intorni circolari „.

Nota di E. G. Togliatti

Nel 1° volume del trattato del prof. Pincherle: *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, a pp. 23-24 (§ 17), è enunciato il teorema seguente, che tende a generalizzare una considerazione di uso frequente nell'analisi: *Data un' area piana limitata, chiusa*, T, *se ad ogni punto* x *di* T *corrisponde un cerchio* γ_x, *di centro* x *e raggio* ρ_x, *per ogni punto del quale sia soddisfatta una proprietà* Q_x *relativa ad* x, *il limite inferiore dei raggi* ρ_x *non è nullo.* La dimostrazione che ne vien data è questa: sia ρ il limite inferiore dei raggi ρ_x; se v è un punto di T in ogni intorno del quale il limite inferiore di quei raggi è ancora ρ, si descrivano i cerchi di centro v e di raggi ρ_v ed $\frac{1}{2}\rho_v$; allora per ogni punto x' del secondo di essi risulta $\rho_{x'} \geq \frac{1}{2}\rho_v$, e quindi: $\rho =$ lim. inf. dei $\rho_{x'} \geq \frac{1}{2}\rho_v > 0$.

L'indeterminatezza in cui vien lasciata la proprietà Q_x, che, a causa della notazione usata, si può supporre possa dipendere da x, fa sorgere dei dubbî. Invero, dal fatto che per tutti i punti del cerchio di centro x' e tangente internamente a γ_v è verificata la proprietà Q_v non segue in modo evidente che per essi è verificata anche la $Q_{x'}$, sì da poter trarre $\rho_{x'} \geq \frac{1}{2}\rho_v$, almeno fin che non si precisi qualcosa circa Q_x.

La cosa è vera quando si tratta del teorema di HEINE sulla continuità uniforme d'una funzione f dei punti di T, perchè allora Q_x consiste nel dire che, entro γ_x, l'oscillazione di f è $\leq$ d'una ε prefissata; è vera anche nel caso considerato dal prof. PINCHERLE nella Memoria: *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche* (« Mem. Acc. Bologna », (4) 3 (1882), § 5 a pp. 153-154), ove pure si parla d'una funzione f dei punti di T, e Q_x consiste nell'affermare che il limite superiore di f in γ_x è finito, o che il limite inferiore ne è > 0. Ma non è più evidente nell'altro caso che il prof. PINCHERLE considera a pag. 95 del trattato citato, dimostrando il teorema di CAUCHY sull'integrale d'una funzione analitica $f(x)$ esteso ad un circuito entro cui $f(x)$ è regolare; qui Q_x *dipende da* x, ed è: per ogni punto y di γ_x si ha

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| < \varepsilon ;$$

sicchè se y è un punto del cerchio di centro x' e tangente internamente a γ_v, da:

$$\left| \frac{f(y) - f(v)}{y - v} - f'(v) \right| < \varepsilon , \qquad \left| \frac{f(x') - f(v)}{x' - v} - f'(v) \right| < \varepsilon$$

si dovrebbe dedurre:

$$\left| \frac{f(y) - f(x')}{y - x'} - f'(x') \right| < \varepsilon .$$

Il dubbio avanzato è dunque legittimo; e d'altra parte è evidente che occorre qualche restrizione per Q_x, se no ρ_x verrebbe ad essere una qualsiasi funzione positiva dei punti di T. (E sarebbe facile contraddire l'enunciato in questione con un esempio che si adatti alla sua forma speciale).

La stessa proprietà, col nome di *teorema degli intorni circolari* o *teorema di* PINCHERLE, è enunciata, con altre notazioni, e per campi ad un numero qualunque di dimensioni, nelle *Lezioni di analisi infinitesimale* del prof. PICONE (vol. I, parte 1ª, pp. 98-99).

in una forma che non elimina del tutto i dubbî di interpretazione, per quanto vi manchi qualsiasi notazione per la proprietà (Q_x del prof. PINCHERLE) che ha da valere entro γ_x. L'A. mi scrive che nel suo enunciato è sottinteso che tale proprietà non debba dipendere dall'intorno γ_x. Ciò infatti è condizione *sufficiente* perchè sian legittime le dimostrazioni dei proff. PINCHERLE e PICONE (quest'ultima consiste nel dedurre, in tale ipotesi, la continuità di ρ_x); ed è anche ciò che avviene nei casi usuali.

In altri termini, tralasciando di parlare di Q_x, che, in sostanza, non fa che dare il legame funzionale tra x e ρ_x, ciò sarebbe come dire che una funzione continua e positiva dei punti di T ha in T un minimo positivo; ma è chiaro che il teorema può valere anche senza l'ipotesi della continuità di ρ_x.

Torino, 22 novembre 1923.