UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: E. Nörlund

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.1, p. 26–31.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_1_26_0¿

SUNTI DI LAVORI ESTERI

N. E. NÖRLUND. — Sunto dei suoi lavori sul *Calcolo delle differenze finite* [5].

3. Gli sviluppi di cui abbiamo parlato hanno una parte cospicua nello studio delle soluzioni delle equazioni lineari omogenee della forma

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x+i) = 0. \tag{7}$$

Facendo larghissime ipotesi sui coefficienti $p_i(x)$, si dimostra [6] l'esistenza di un sistema fondamentale di soluzioni uniformi $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$, e la soluzione più generale è allora della forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i(x) f_i(x),$$

dove le $\pi_i(x)$ sono funzioni periodiche di periodo 1. Consideriamo in particolare le equazioni alle differenze finite che, con un passaggio al limite, danno origine ad un'equazione differenziale della classe di FUCHS. L'equazione (7) può sempre scriversi:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x-1)(x-2)\ldots(x-i) q_i(x) \Delta^i f(x) = 0. \tag{8}$$

Ammettiamo che i coefficienti $q_i(x)$ siano funzioni rappresentabili da serie di facoltà della forma (1) e che sia $q_n(+\infty) \neq 0$. Si sa trovare [7] un sistema fondamentale di soluzioni della forma

$$f_i(x) = x^{\rho_i}(\psi_0(x) + \psi_1(x)\log x + \ldots + \psi_r(x)\log^r x), \tag{9}$$

(5) Continuazione, v. anno II, n. 5, p. 182.

(6) *Sur l'existence de solutions d'une équation lineaire aux différences finies.* Ann. Éc. Norm., S. 8, T. 31 (1914), p. 205-221.

(7) *Sur l'intégration des équations aux différences finies par des séries de facultés.* Rendic. Circ. Mat. di Palermo, T. 35 (1913), p. 177-216.

dove le $\psi_i(x)$ sono funzioni che in un certo semipiano $\sigma > \lambda > 0$ ammettono uno sviluppo in serie di facoltà della forma (1). Se i coefficienti $q_i(x)$ sono funzioni uniformi, lo stesso è delle soluzioni $f_i(x)$. Dall'espressione (9) si conclude subito che se x tende all'infinito rimanendo nel semipiano $\sigma > \lambda$, le soluzioni $f_i(x)$ si comportano assintoticamente come

$$(10) \qquad f_i(x) \backsim x^{\rho_i}(c_0 + c_1 \log x + \dots + c_r \log^r x),$$

dove le c_n sono costanti di cui una almeno non è nulla. Inversamente, se una equazione alle differenze ammette un sistema fondamentale di soluzioni della forma (9), essa è necessariamente della forma (8). In particolare, se i coefficienti $q_i(x)$ sono olomorfi in vicinanza di $x = \infty$, si dimostra che l'uguaglianza assintotica (10) sussiste nell'angolo $\pi - \varepsilon > \arg x > -\pi + \varepsilon$.

Consideriamo, in secondo luogo, il caso in cui i coefficienti dell'equazione (7) sono polinomi in x. Si sa allora (8) trovare un sistema fondamentale di soluzioni meromorfe $f_1(x)$, $f_2(x)$,.... $f_n(x)$, che sono della forma

$$(11) \qquad f_i(x) = \Gamma^{\mu_i}(x) a_i^x x^{\rho_i}(\psi_0(x) + \psi_1(x) \log x + \dots + \psi_r(x) \log^r x),$$

dove le μ_i, a_i, ρ_i sono costanti, mentre le $\psi_i(x)$ sono funzioni che, in un semipiano $\sigma > \lambda$, ammettono uno sviluppo della forma (6). Se sono soddisfatte certe disuguaglianze, si può andare oltre: le $\psi_i(x)$ si rappresentano mediante serie di facoltà della forma (2) convergenti per $\sigma > \lambda$. Se ne conclude immediatamente che si avrà:

$$(12) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f_i(x)}{\Gamma^{\mu_i}(x) a_i^x x^{\rho_i} \log^m x} = c_i,$$

x tendendo all'infinito rimanendo nel semipiano $\sigma > \lambda$, e c_i essendo una costante diversa da zero. Infine, si sa trovare un secondo sistema fondamentale $f_1(x)$, $\bar{f}_2(x)$,... $f_n(x)$, tale che quanto si è detto per le $f_i(x)$ sussiste per le $f_i(-x)$. Fra questi due sistemi di soluzioni valgono relazioni della forma

$$f_i(x) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{i,s}(x) f_s(x),$$

dove le $\pi_{i,s}(x)$ sono funzioni razionali di $e^{2\pi i x}$. Da queste relazioni segue che l'uguaglianza assintotica (12) si mantiene per ogni raggio vettore, eccettuando un certo numero di raggi critici;

(8) *Sur les équations linéaires aux diff. finies à coeff. rationnels.* Acta Math., T. 40 (1915), p. 191-249.

ma, bene inteso, attraversando un raggio critico le costanti a_i, ρ_i, m e c_i cambiano bruscamente il loro valore. La vicinanza del punto $x = \infty$ è dunque divisa, dai raggi critici, in un certo numero di angoli; nell'interno di ogni angolo si ha un'uguaglianza della forma (12), ma quando si passa da un angolo ad un altro, le costanti appartenenti ad una soluzione si permutano con quelle appartenenti ad un'altra.

4. Il problema più importante nel Calcolo delle differenze finite consiste nel trovare un metodo generale per risolvere l'equazione

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x), \tag{13}$$

$\varphi(x)$ essendo una funzione data. Si vede subito che la (13) possiede infinite soluzioni, e se $f_1(x)$ ne è una particolare, la soluzione più generale è della forma

$$f(x) = f_1(x) + \pi(x),$$

essendo $\pi(x)$ una funzione periodica di periodo 1. Presa $f(x)$ arbitrariamente nella striscia $0 \leq \sigma \leq 1$, la (13) determina successivamente $f(x)$ per ogni altro valore di x: se quindi si vuole trovare una soluzione qualunque, non c'è problema. Ma bisogna intendersi del significato della parola soluzione.

Ammettiamo dapprima che $\varphi(x)$ sia un polinomio di grado n. Si vede subito che esiste un polinomio di grado $n+1$ che soddisfa a (13); esso contiene una costante arbitraria ed è determinato completamente se ne è dato il valore in un punto qualunque. La soluzione generale si ottiene aggiungendo alla soluzione razionale una funzione periodica. Se $f(x)$ si determina nel modo anzidetto, uguagliando $f(x)$ ad una funzione analitica qualsiasi nella striscia $0 \leq \sigma < 1$, si troverà una soluzione generalmente composta di infinite funzioni analitiche. Ma se si determina $f(x)$ in un modo assai particolare nella detta striscia, si può ottenere che queste funzioni in numero infinito vengano a coincidere, formando una sola funzione analitica. Se si aggiunge la condizione che questa funzione analitica sia un polinomio, non si ha altra libertà che quella di darne il valore in un solo punto; essa è interamente determinata per ogni altro valore di x.

In questo caso particolare si vede dunque facilmente come la soluzione razionale si distingua da ogni altra; essa è, per così dire, la più semplice, ed è determinata all'infuori di una costante arbitraria, mentre la soluzione generale contiene una funzione periodica arbitraria.

Così stando le cose, sembra naturale di chiedersi se, anche in casi più generali, non si possa giungere a distinguere una speciale soluzione, ed in quale modo essa possa essere caratterizzata. In una recente memoria [9], ho fatto uno studio approfondito dell' equazione (13) ed ho mostrato come varie vie conducano tutte ad una medesima soluzione distinta, ch' io ho chiamata ***soluzione principale***. È opportuno di introdurre nella (13) un parametro, scrivendolo

$$\Delta_\omega f(x) = \varphi(x), \quad \text{con} \quad \Delta_\omega f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}. \tag{14}$$

Applico alla $\varphi(x)$ un certo algoritmo ch'io indico col simbolo

$$\mathop{S}_a^x \varphi(x) \Delta x \tag{15}$$

e che consiste essenzialmente nell' applicazione di certi metodi di sommazione alla serie

$$\varphi(x) + \varphi(x+\omega) + \varphi(x+2\omega) + \ldots..$$

Si può scegliere fra un' infinità di metodi diversi, ma si dimostra che essi conducono tutti ad una medesima funzione (15), che soddisfa all' equazione (14) e ch' io indico come soluzione principale. L' operazione (15) può essere così considerata come l' inversa della Δ_ω. La soluzione principale dipende da una costante arbitraria a ed è interamente determinata dal suo valore in un punto qualunque.

La definizione della soluzione principale mediante l' algoritmo (15) è analogo alla definizione della soluzione dell' equazione

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x) \tag{16}$$

mediante un integrale definito. Tendendo ω a zero, l' equazione (14) tende alla equazione (16) e la soluzione principale tende ad un limite: si ha infatti

$$\lim_{\omega \to 0} \mathop{S}_a^x \varphi(x) \Delta_\omega x = \int_a^x \varphi(x) dx.$$

L' algoritmo in discorso non è soltanto una definizione, ma ci dà pure il mezzo di *calcolare* la soluzione principale. Quando

[9] *Mémoire sur le calcul aux différences finies*, Acta mathem., T. 44 (1922), p. 71-211.

si tratti solo di caratterizzarla, vi si può giungere in più modi diversi. Se alla $\varphi(x)$ si impongono certe condizioni ai limiti, si dimostra che la soluzione principale $f(x \mid \omega) = \overset{x}{\underset{a}{S}} \varphi(x) \Delta_\omega x$ soddisfa a simili condizioni, mentre ciò non accade per le altre soluzioni. Ad esempio, sia $\varphi(x)$ una funzione analitica olomorfa nel semipiano $\sigma \geq b$ ed ivi soddisfacente alla disuguaglianza

$$|\varphi(x)| < Ce^{(k+\varepsilon)|x|},$$

C essendo una costante positiva. Si dimostra che la soluzione principale $f(x \mid \omega)$ è olomorfa nel detto semipiano purchè sia $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$; di più, si sa trovare una costante positiva C_1 tale che sia $|f(x \mid \omega)| < C_1 e^{(k+\varepsilon)|x|}$. Ogni altra soluzione soddisfacente a queste condizioni non può differire dalla soluzione principale se non per una costante. *Fra le soluzioni olomorfe, la soluzione principale è dunque quella di crescenza minima.*

Supponiamo in secondo luogo che $\varphi(x)$ sia funzione della variabile reale x, che abbia la derivata di un certo ordine, la quale tenda a zero per x crescente indefinitamente. Si dimostra che lo stesso accade di $f(x \mid \omega)$, ma non per le altre soluzioni.

Nella Memoria citata, ho dato un gran numero di notevoli proprietà della soluzione principale. Per darne un esempio, si noti che la $f(x \mid \omega)$ ammette un teorema di moltiplicazione

$$\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1} f\left(x + \frac{s\omega}{m} \,\middle|\, m\right) = f\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{m}\right) \tag{17}$$

m essendo un intero positivo qualsiasi. Facendo tendere m all'infinito, se ne deduce

$$\frac{1}{\omega}\int_k^{k+\omega} f(z \mid \omega)dz = \int_a^n \varphi(z)dz. \tag{18}$$

Facendo in particolare $\varphi(x) = \log x$, $\omega = 1$, si trova come soluzione principale la funzione $\log \Gamma(x)$ e l'equazione (17) si riduce alla relazione di GAUSS.

$$\Gamma(mx) = \frac{m^{mx-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\prod_{s=1}^{m-1}\Gamma\left(x + \frac{s}{m}\right), \tag{17*}$$

mentre la (18) dà la formula di RAABE.

$$(18^*) \qquad \int_x^{x+1} \log \Gamma(z)dz = x(\log x - 1) + \log \sqrt{2\pi}.$$

5. L'operazione (15) permette di risolvere facilmente l'equazione lineare a secondo membro

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x+i) = \varphi(x);$$

basta applicare il metodo della variazione delle costanti di LAGRANGE. Sia $f_1(x)$, $f_2(x)$,.... $f_n(x)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea (7) e siano $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$,.... $\mu_n(x)$ i moltiplicatori di questa equazione, vale a dire funzioni soddisfacenti al sistema

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) f_i(x+s) = \begin{cases} 0 \text{ per } s = 1, 2, \ldots\, n-1 \\ 1 \text{ per } s = n. \end{cases}$$

È noto che questi moltiplicatori formano un sistema fondamentale di soluzioni delle

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n-i}(x+i)\mu(x+i) = 0,$$

e si dimostra che la soluzione generale dell'equazione (19) è della forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(x) f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \mathop{S}_{a}^{x} \frac{\varphi(z)}{\mu_i(z)} \Delta z,$$

le $\pi_i(x)$ essendo funzioni periodiche di periodo 1.

Nello studio delle equazioni non lineari, si può, con grande vantaggio, giovarsi di un metodo di approssimazioni successive analogo a qaello che si è usato nella teoria delle equazioni differenziali. Questo procedimento consiste in un'applicazione ripetuta dell'operazione (15), la quale risulta pertanto di importanza fondamentale nel Calcolo alle differenze finite. (*Dall'Autore*).

Ottobre 1923.