UMI

Recensioni

* E. Nörlund, Videnskabelige Causerier (Conferenze scientifiche)
* F. Vercelli, Nuovi esperimenti di previsioni metereologiche
* F. Vercelli, Le scienze fisiche e matematiche nelle opere di Dante
* H. W. E. Jung, Einführung in die Theorie der algebraischen Funtionen einer Veränderlichen
* S. Pincherle, Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.1, p. 32–43.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_1_32_0¿

RECENSIONI

N. E. NÖRLUND, *Videnskabelige Causerier* (Conferenze scientifiche), G. Gjellerup, Copenaghen, 1923.

Col tradurre « Causerier » per Conferenze, premettiamo, in omaggio alle intenzioni dell'Autore, che facciamo assegnamento sul largo significato che ha acquistato ormai la parola Conferenza, così da potersi estendere, senza possibile equivoco, ad un'esposizione, come si direbbe, alla buona del proposto soggetto. Poichè l'autore dichiara, nella breve Prefazione, il proposito di « fornire uno sguardo sui metodi delle Scienze Esatte, e un orientamento nei problemi di cui si occupano queste Scienze, ad un lettore, che non abbia punto famigliarità colla Matematica », per mezzo di questo libro, dal cui contenuto scaturisce come non possa avere avuto di mira alcuna trattazione esauriente. Libro composto, per la massima parte, con articoli comparsi, in appendice, nel giornale *Politiken* a cui è aggiunto in fine « un piccolo corso astronomico, « tenuto, al tempo della guerra mondiale, in un campo di prigio- « nieri, per incarico della Croce Rossa ».

Gli argomenti sono quelli di cui segue il titolo, accompagnato da cenni sommarii sul relativo svolgimento.

I metodi delle scienze esatte. — L'Autore, prendendo le mosse dai recenti progressi delle scienze collegate colla Matematica, cioè la Meccanica, l'Astronomia, la Fisica Matematica, con particolare accenno ad EINSTEIN, che ha ottenuto un'essenziale semplificazione della nostra immagine del mondo, e a BOHR, che ha costruito una teoria degli atomi capace di fornire *a priori* le proprietà chimiche dei corpi, svolge, coll'aiuto di interessanti esempii, la tesi che il metodo delle Scienze Esatte è quello delle approssimazioni successive. Risale agli elleni, che elevarono a dottrina speculativa la geometria pratica degli egiziani, e ricorda la connessione che essi stabilivano tra la matematica e la bellezza, donde la concezione di PLATONE che quattro dei poliedri regolari, i più belli e i più semplici corpi che si possano ideare, compongono i quattro elementi, e dal quinto la Divinità abbia costruito l'universo. Ricorda la corrispondenza stabilita da TICHO BRAHE tra i sette pianeti di quel tempo e gli organi vitali del corpo umano, per conchiudere che, in conseguenza, nessuno potrebbe negare l'influenza degli astri sulle umane vicende. E chi trovi oltremodo ingenue queste concezioni è dall'autore giudicato ancora più ingenuo, chè tutti quanti stiamo nei lacci del pregiudizio, donde è enormemente difficile liberarsi. La ventura generazione, dice l'autore, metterà insieme col citato discorso di TICHO BRAHE la nostra affermazione, con NEWTON, che la forza centrifuga consiste in un'azione reciproca tra la materia e lo spazio assoluto. Noi tendiamo a popolare l'intera Natura di dei: dei di PLATONE i poliedri regolari, dei di TICHO BRAHE i pianeti, dei sono chiamati da noi lo spazio e il tempo assoluto. Dalle osservazioni di TICHO BRAHE, KEPLER trae il movimento ellittico dei pianeti. Da questo NEWTON trae la legge dell'attrazione, in conseguenza della quale il risultato di KEPLER diventa approssimativo, l'orbita dei pianeti oscilla intorno all'ellisse kepleriana. Viene poi EINSTEIN, e ci eleva ad una più alta e più comprensiva concezione, fornendoci un più logico sistema, e una legge della gravitazione, in confronto della quale quella di NEWTON riesce una pura approssimazione. Noi nutriamo una fede inconcussa che le successive approssimazioni tendano a qualcosa che chiamiamo la Verità, e questa può essere giustamente chiamata la fede dello scienziato.

Il pubblico, nel fondersi di una teoria in un'altra, trova ragione di diffidare della Scienza. Ma il pubblico dimentica che ciò significa puramente che da un'approssimazione si giunge in un'altra. Nè si può arrivare alla terza approssimazione senza passare per la seconda.

Storia dei numeri. — La citazione di alcuni versi di BJÖRNSTJERNE BJÖRSTON, pel centenario della nascita di ABEL, coi quali la Matematica è chiamata la Scienza del Numero, conduce l'autore a domandare: « Ma che cosa è il numero? ». Alla qual domanda fa seguire l'altra: « È il numero, che abbiamo famigliare, lo stesso in tutto che il numero dei matematici? ». La risposta implica di analizzare alquanto il concetto di numero, e rintracciarne l'evoluzione, col volgere del tempo. In questa conferenza l'Autore connette principalmente questa evoluzione colla rappresentazione stessa del numero presso i varii popoli, dai tempi antichi fino ai tempi nostri.

Passa quindi in rivista la rappresentazione degli egiziani nei geroglifici, dei romani, dei cinesi, dei greci, per venire in fine a quella dagli indiani, passata, attraverso agli arabi, a noi, e accenna a pregi e a difetti, sotto il molteplice aspetto della lucidità, dell'economia, dell'agevolazione al calcolo. Cercata l'origine del sistema decimale in tre pastori, che contano le pecore per unità, decine e centinaia, ricorrendo alle dita delle mani, accenna ai sistemi diversi, che si trovano effettivamente usati, e che potrebbero sostituirsi al sistema decimale, per semplificare l'abbaco. La base 4 permetterebbe di sopprimere le tavole di moltiplicazione, e, secondo l'Autore, sarebbe certamente scelto da una Commissione Parlamentare, incaricata di fissare una nuova base numerica, da surrogare all'« indemocratico » 10.

Numero di varia specie. — Dal numero intero positivo, oggetto del precedente discorso, l'Autore ci porta, per gradi, al numero intero negativo, al numero frazionario, al numero irrazionale, connesso colla misura del segmento di retta, per la qual via ritrova il postulato della continuità di DEDEKIND, e finalmente all'ordinario numero complesso. Il criterio, che presiede a questa progressione, consiste in ciò che il matematico decreta semplicemente che *deve* risolvere il tal problema, e dove non trova la soluzione, crea un nuovo ente, che chiama soluzione. La condizione poi che siano rispettate le leggi fondamentali dell'aritmetica chiude la progressione ai suddetti numeri complessi. Passando ai numeri grandissimi, introduce la nozione della *potenza* di CANTOR, che permette di confrontare il valore di insiemi infiniti di numeri, premesse riflessioni generali sul significato di numeri la cui grandezza eccede la nostra intuizione, tratti anche dal presente cambio europeo delle monete, per cui un bilione di rubli per prezzo di un cavallo ha il significato di 500 corone (danesi) in Francia e in Italia, e invece mille volte tanto in Danimarca o in Inghilterra.

Geometria. — Partendo dal celebre motto, scritto da PLATONE sulla porta della sua Accademia: « Nessuno entri che non sa la Geometria », per rilevare la proclamata eccellenza della Geometria, l'Autore viene a domandarsi come potrebbe avvenire che una dottrina puramente ideale servisse all'indagine del mondo reale, o se, per avventura, la Geometria non fosse semplicemente una scienza sperimentale. E risponde che nessuno dei due aspetti regge alla prova, ma la soluzione dell'enigma si troverà in parte nella circostanza che, sotto il termine Geometria, si intendono più cose interamente diverse. Gli antichi geometri, prosegue l'Autore, erano artigiani e architetti, per cui le origini della Geometria sono quelle di una scienza sperimentale. Ma, presso gli elleni, essa diventa scienza eminentemente speculativa. Passa così a discorrere dei fondamenti della geometria di EUCLIDE, donde, omettendo il quinto postulato, alla geometria di LOBACEVSKIJ, e, sopprimendo le parallele, alla geometria di RIEMANN, con che non sono esaurite le specie di Geometria, poichè si può mutare la definizione della lunghezza, come si può creare, col sopprimere il postulato di ARCHIMEDE, una geometria non-archimedea. Un richiamo alla teoria della Relatività accenna all'applicazione allo spazio fisico, di cui è pur suscettibile la geometria non-euclidea. Che cosa sono poi il punto, la retta, il piano? Le riprodotte definizioni di EUCLIDE sono piuttosto descrizioni. HILBERT vi sostituisce definizioni indipendenti da ogni immagine concreta, che si prestano ad immagini diverse. La definizione aritmetica del punto, mediante tre numeri appartenenti ed una certa varietà, e via dicendo, riconduce, con vantaggio pel confronto dei postulati, la Geometria all'Analisi. Infine, contro le geometrie ideali, sorge HJELMER, come un altro GIAN GIACOMO ROUSSEAU, e rievoca il « retournons à la nature ». Questa geometria pratica, e tuttavia informata alla critica scientifica, fornisce, all'impressione dell'Autore, « un'immagine del mondo di una singolare, quasi inconcepibile, bellezza, che è così affascinante come quella dei capolavori di Michelangelo ».

Teoria atomica di Niels Bohr. — L'Autore comincia con cenni biografici sul geniale compaesano, a cui l'opera oggetto della presente conferenza valse, lo scorso anno, il premio Nöbel per la Fisica, ed egli, professando piena fede in quella concezione dell'atomo, assegna, alla fine, un posto altrettanto significativo come quelli che si intitolano da GALILEO, da KEPLER, da NEWTON.

Il passaggio ad un argomento di Fisica Matematica da argomenti di pura Matematica gli porge occasione di rilevare le differenze caratteristiche del compito delle due dottrine: le Matematiche sapendo, ad ogni momento, che cos'è ciò di cui discorrono, mentre la Fisica deve risalire dagli effetti alle cause. Espone poi le ipotesi di BOHR, informate alla precedente costruzione di RUTHERFORD, e ricorda le brillanti conferme dell'esperienza, che giungono alla previsione dei fenomeni, per cui la teoria può reclamare grado di esattezza paragonabile alla Meccanica Celeste, che prevede i movimenti degli astri.

La luna, il sole, le ecclissi sono i titoli delle tre ultime conferenze, che istruiscono, in chiara e bella forma, il lettore sulle principali circostanze attinenti agli astri del giorno e della notte, e sulle vicendevoli loro occultazioni.

GIAN ANTONIO MAGGI

FRANCESCO VERCELLI: *Nuovi esperimenti di previsioni metereologiche.* Arti grafiche U. Pinarò, 1923, pag. 1-78.

I metodi comuni di previsione del tempo sono fondati sulla considerazione di carte metereologiche sinottiche, che rappresentano lo stato di pressione atmosferica, di temperatura, ecc. nei vari luoghi allo stesso momento, e tendono a prevedere i cambiamenti simultanei di questi stati metereologici col tempo. Con questi metodi non si sono potute spingere le previsioni oltre un periodo di 24 ore, pur dovendo considerare anche elementi incerti e locali.

Il bisogno di fare delle previsioni a scadenza più lunga, manifestatosi specialmente durante la guerra per la preparazione delle azioni militari, ànno dato occasione all'A. di approfondire il metodo, ch'egli chiama dell'*analisi periodale* delle variazioni della pressione barometrica, ch'è il primo e più importante elemento per la determinazione del tempo, nello stesso luogo. I barogrammi vengono sottoposti dapprima ad un'analisi, per la quale, con un metodo speciale di scomposizione, si ottengono delle linee semplici sinusoidali, che rappresentano le *oscillazioni periodali*, molto diverse fra loro per la grandezza del periodo, per lo smorzamento e spesso anche per la permanenza delle linee stesse, che può essere temporanea. Degli appositi apparecchi meccanici (tecnigrafi analizzatori) permettono una rapida esecuzione meccanica delle operazioni che conducono all'analisi dei barogrammi.

Per ottenere la linea di previsione del futuro percorso del barogramma, si prolunga ciascuna delle linee semplici ottenute con l'analisi, regolandone opportunamente lo smorzamento, e si procede quindi alla loro sintesi.

I barogrammi di luoghi situati vicino all'equatore si distinguono per una straordinaria semplicità e regolarità. Ne è quindi facilissima l'analisi. Diventano tanto più complessi quanto più aumenta la latitudine del luogo e quanto più il clima è continentale. Allora diventa anche più difficile l'applicazione del metodo sopra descritto.

Le previsioni vengono fatte per periodi di una settimana ed anche più lunghi ed ànno dato risultati sorprendenti già durante la guerra. L'Istituto geofisico di Trieste, diretto dal prof. Vercelli, pubblica tali diagrammi di previsione dal 1920 e le numerose figure riportate nell'interessantissimo opuscolo provano che assai spesso essi sono quasi coincidenti coi barogrammi reali.

g. f.

FRANCESCO VERCELLI: *Le scienze fisiche e matematiche nelle opere di Dante.* Roma, Arti grafiche, U. Pinarò. Dalla « Rivista Marittima » del febbraio 1923.

È una conferenza tenuta dall'A. per la Sezione triestina della « Mathesis » nel sesto centenario della morte del poeta. Egli esamina accuratamente tutte le idee che si trovano manifestate nelle varie opere di Dante riguardo ad argomenti scientifici e riesce a dare insieme un quadro interessante di quelle ch'erano le concezioni più diffuse del suo secolo. Predominava ancora la scienza di Aristotile; in un concetto così fondamentale com'è quello sul moto, Dante sente sempre il bisogno di indicare una forza o una volontà superiore quale movente, anche quando non si tratta che di conservazione della velocità. Pure da qualche espressione l'A. crede di poter inferire ch'egli abbia avuto qualche intuizione della legge d'inerzia.

Sorprende la profondità delle conoscenze che il poeta dimostra di possedere nel campo della cosmologia, che danno occasione all'A. di fare delle interessanti osservazioni. Le idee sui fenomeni metereologici sono particolarmente esatte e precise; il poeta non segue mai pregiudizi o credenze volgari ma si attiene all'idea scientifica. Così a proposito di vari altri argomenti, alcuni dei quali dibattuti in quei tempi, l'A. rileva la singolare precisione delle vedute del poeta in rapporto al suo tempo, e infine l'apprezzamento ch'egli fa del metodo sperimentale da seguire nell'indagine del vero.

Anche nel campo della matematica a Dante erano noti tutti i problemi più discussi dai suoi contemporanei e l'A. cita quello della quadratura del circolo e parecchi altri che accade di trovar menzionati nelle sue opere. *g. f.*

H. W. E. JUNG. *Einführung in die Theorie der algebraischen Funtionen einer Veränderlichen.* Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter, 1923.

Questa opera si propone lo scopo di svolgere, a lettori che conoscano gli elementi della teoria delle funzioni analitiche, un corso organico sulle funzioni algebriche di una variabile, e lo scopo si può dire raggiunto, qualora si convenga nel punto di vista che l'A. ha prescelto. Fra i tre metodi principali che si possono seguire nell'esposizione della teoria generale delle funzioni algebriche di una variabile: quello geometrico, iniziato da CLEBSCH, JORDAN, CREMONA, proseguito da BRILL e NŒTHER e portato a compimento dalla scuola italiana; quello più strettamente collegato colla teoria delle funzioni, che riceva la sua maggiore efficacia dal fondarsi sulle trascendenti abeliane e che pure può presentarsi in modi diversi, sia seguendo il WEIERSTRASS, sia attenendosi alla scuola di RIEMANN; quello infine che è stato detto aritmetico, il quale introduce nello studio del corpo algebrico il linguaggio e, fin dove è possibile, i procedimenti della teoria dei numeri; fra queste tre vie, l'Autore si è attenuto all'ultima, tracciata dapprima da DEDEKIND e WEBER, divulgata e fino ad un certo punto semplificata in un'opera classica fra i geometri tedeschi, pubblicata nel 1902 da HENSEL e LANDSBERG: ed è ai procedimenti di questi Autori che il nostro dichiara di attenersi principalmente. Questa via consente una precisione ed un rigore che le sono proprî: però, l'esclusione che essa si impone di ogni raffronto geometrico nei primordi della teoria, e la nomenclatura speciale alla quale deve attenersi, gli conferiscono un certo carattere di aridità. Ammesso però il punto di vista che l'A. ha creduto di scegliere, si deve riconoscere che la trattazione è assai bene condotta, che gli argomenti sono rigorosamente concatenati, e che l'astrazione del testo viene compensata da una abbondante copia di esercizî intercalati e largamente sviluppati, capitolo per capitolo: per la loro varietà e per l'opportuna scelta, non esitiamo a riconoscere, in questo corredo di esempi, uno dei maggiori pregi dell'opera.

Passando ora ad una rapida rassegna del contenuto del libro, troviamo nel primo Capitolo, immediatamente dopo la definizione di y come funzione algebrica di x (y è tale quando è legata ad x da una relazione $f(x, y) = 0$, dove f è funzione razionale intera indecomponibile di x ed y) le nozioni circa il comportamento di y nell'intorno di punti x siano ordinarî, siano singolari, siano anche punti d'infinito per y. Tutto ciò suppone nel lettore la conoscenza del fatto che y è funzione analitica di x: però, trattandosi di un punto tanto essenziale per gli enti cui l'opera è consacrata, sarebbe stato desiderabile che la dimostrazione di questo fatto fondamentale avesse trovato posto nell'opera stessa, fino da questo primo capitolo. La determinazione degli sviluppi in serie nell'intorno di un punto singolare, mediante l'uso del diagramma di PUISEUX, forma l'argomento del Cap. II, argomento pure corredato di bene scelti esercizî; così è anche nel Cap. III, destinato ad esporre ed illustrare il concetto di superficie di RIEMANN. Nel Cap. IV, viene definito il corpo algebrico (x, y) e sono date le proprietà delle funzioni che lo compongono; il loro comportamento nell'intorno dei varî punti della Riemanniana relativa:

vengono caratterizzati gli zeri e gl'infiniti dei varî ordini ed i residui delle funzioni del corpo, chiudendo il Capitolo la ben nota proprietà caratteristica delle funzioni algebriche. Il Cap. V tratta delle trasformazioni birazionali, e ne illustra subito il concetto con tre esempi opportunamente svolti; viene quindi risolto il problema di determinare, data una funzione ξ del corpo (x, y), una seconda funzione η per modo che il corpo (ξ, η) risulti identico ad (x, y). Col Cap. VI si entra nella parte più essenziale della teoria trattata al punto di vista aritmetico, quella che le dà il suo particolare carattere mediante la definizione di *divisore* ed i concetti che vi si connettono, di fattori primi, di divisori di diramazione e di classi di divisori, e fra queste, di classe principale (classe delle funzioni del corpo) e di classe canonica (classe dei differenziali delle funzioni del corpo), che permette l'introduzione del concetto di *genere*. La costruzione manifesta indubbiamente un carattere alquanto artificioso, ma dato l'ordine abilmente distribuito con cui l'A. la presenta, da essa si diparte una via che conduce con sicurezza allo scopo, che è quello della determinazione delle funzioni del corpo mediante la conoscenza dei loro zeri ed infiniti, nonostante che la via stessa possa sembrare talvolta scarsamente illuminata. Dopo un Capitolo (VII) destinato a dare, in forma di digressione, gli elementi del calcolo delle matrici, e dopo la lunga e laboriosa teoria svolta nel Cap. VIII, fondata sui concetti introdotti dianzi (Cap. VI) e di non troppo facile lettura, sebbene sempre chiarita con opportuni esercizi, si viene a stabilire, nel Cap. IX, il teorema fondamentale di RIEMANN-ROCH, sotto una forma che non si può identificare coll'usuale se non attraverso una traduzione della nomenclatura di cui l'opera fa uso, e che è particolare alle vedute cui essa è ispirata. Nel Cap. X si studia la curva algebrica in coordinate cartesiane: ne sono esaminati, con applicazione dei concetti precedentemente esposti, i divisori nei punti multipli, i rami della curva, con particolare menzione dei rami reali, ed è valutato il numero dei punti d'intersezione di due rami e di due curve sempre fondandosi sulla teoria dei divisori, ma ad un punto di vista che porta, sulle prime, a risultati discordanti con quelli dell'usuale geometria analitica (cfr. pag. 187). La discordanza viene spiegata nel seguente Cap. XI, dove la curva algebrica è studiata in coordinate omogenee, ed in cui lo studio è maggiormente svolta, trattandovisi della curva Hessiana, delle formule di PLÜCKER, ecc., e venendo infine alle curve aggiunte ed al teorema di NŒTHER, sia pure in forma alquanto diversa dall'usuale. Anche in questi due capitoli la teoria è illustrata da esempi bene scelti ed accuratamente svolti. Chiudono il libro due brevi capitoli (XII e XIII) riguardanti, il primo, l'ordine di connessione di una superficie di RIEMANN, il secondo gl'integrali di differenziali algebrici, offrendo la dimostrazione dell'esistenza di p integrali abeliani di prima specie, e dando il celebre teorema (detto della lacuna) di WEIERSTRASS relativo agli integrali di seconda specie.

Concludendo, riteniamo che la lettura del libro dello JUNG, pur non potendo sostituire in tutto la visione geometrica della curva algebrica e degli enti ad essa collegati, nè la base trascendente che la teoria delle funzioni può dare allo studio degli enti algebrici, anche col sussidio del teorema di CAUCHY quasi assolutamente escluso dal punto di vista dell'A., sia tuttavia da raccomandarsi a quegli studiosi che intendendo di approfondire la teoria delle funzioni algebriche di una variabile considerandola sotto ai suoi varî aspetti, vogliono riconoscere come sia possibile di darle fondamenti che non richiedono nulla più dei postulati dell'Aritmetica. *s. p.*

S. PINCHERLE. — *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche.* Bologna, N. Zanichelli, 1922

Nel Cap. IV si comincia col trovare un valore maggiorante pei coefficenti di una serie di potenze; si dimostra che sulla circonferenza di convergenza esiste almeno un punto singolare per la funzione analitica definita dalla serie; e a questo proposito si danno due notevoli teoremi di VIVANTI e di PICARD.

È data la definizione di funzione intera (lo studio di codeste funzioni è fatta al Cap. IX) e si dimostra che il massimo modulo $M(r)$ di una tale funzione sopra una circonferenza di centro $x=0$ e raggio (r) tende all'infinito con r. Una funzione analitica se non è costante non può avere per campo di regolarità tutto il piano-sfera.

Una funzione analitica entro un'area A tutta contenuta nel campo di regolarità non può avere che un numero finito di radici; un punto limite di radici di una funzione analitica è un punto singolare; altrettanto dicasi per i punti di livello (radici dell'equazione $f(x)-c=0$), donde il teorema di RIEMANN: una funzione analitica è costante se lo è in un tratto di linea interno al campo di regolarità.

È dimostrato poi il teorema di Weierstrass sull'analiticità e la derivabilità termine a termine delle successioni di serie di potenze convergenti uniformemente ad un limite. L'ultimo paragrafo del Capitolo è dedicato a far vedere come una espressione analitica possa non rappresentare alcuna funzione analitica o più funzioni analitiche distinte in diverse regioni del piano.

Nel Cap. V, data la definizione di polo di ordine m per una funzione, è studiato il quoziente di due funzioni analitiche nei vari casi in cui in un punto le due funzioni analitiche non siano nulle nè abbiano un polo, ovvero abbiano ivi una radice od un polo. È dimostrato che una funzione analitica regolare in tutto il piano-sfera tranne che in $x = \infty$ ove ha un polo d'ordine m è razionale intera di grado m; che una funzione analitica la quale non abbia in tutto il piano-sfera che poli è funzione razionale. È fatto vedere che una funzione razionale nell'intorno di ogni punto c, che non sia radice del denominatore, è sviluppabile in serie di potenze di $x - c$ i cui coefficenti soddisfano ad un'equazione lineare omogenea alle differenze a coefficienti costanti, e la proposizione reciproca. Sono richiamati gli sviluppi e le proprietà delle funzioni esponenziale e circolari, poi è studiata la funzione $\log x$, come primo semplice esempio di funzione multiforme.

Nel Cap. VI si danno due dimostrazioni del teorema di Cauchy, l'una mediante la formula di Green, l'altra diretta che vale sotto condizioni meno restrittive, e si mostra come si applichi il teorema se l'area in cui la funzione è supposta monogena uniforme è non semplicemente connessa. Data una funzione monogena uniforme in un'area semplicemente connessa si mostra come l'integrale $\int_a^x f(t)dt$ è funzione di x, ad un valore, continua, monogena ed avente per derivata $f(x)$; e si mostra come lo stesso integrale è funzione monogena multiforme se l'area non è semplicemente connessa.

Sono stabilite le formule integrali di Cauchy; l'una valida per una funzione monogena entro un'area A semplicemente connessa, l'altra entro un'area B non semplicemente connessa; se ne deduce la sviluppabilità in serie di potenze di $x - \alpha$ di una funzione monogena entro un'area A semplicemente connessa, α punto interno di A, quindi la coincidenza fra i concetti di funzione analitica secondo Weierstrass e di funzione monogena secondo Cauchy.

riabile complessa continua in un'area A semplicemente connessa e l'integrale esteso ad una qualunque linea chiusa di lunghezza finita contenuta in A è nullo, la $f(x)$ è analitica regolare in A. Sono fatte alcune interessanti applicazioni del teorema MORERA.

Nel Cap. VII si dimostra il noto sviluppo di LAURENT e si estende alle serie di LAURENT il teorema di WEIERSTRASS dimostrato nel capitolo III. Si dimostra che se funzione è analitica regolare monodroma in un'area T ad eccezione di un punto α è la somma di una funzione regolare in α è di una funzione *quasi intera* $F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)=\sum_{1}^{\infty}\frac{c_n}{(x-\alpha)^n}$ regolare in tutto il piano-sfera ad eccezione di $x=\alpha$, la quale caratterizza la singolarità di $f(x)$ per $x=\alpha$. Il coefficiente di $(x-\alpha)^{-1}$ nello sviluppo di LAURENT di $f(x)$ è detto con CAUCHY ***residuo*** di $f(x)$ per $x=\alpha$; è detto ***residuo integrale*** rispetto ad un'area T l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(t)dt$ esteso al contorno c di un'area semplicemente connessa T entro cui vi siano punti singolari isolati od aree $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_p$ in cui $f(x)$ non è regolare. Se le aree precedenti si riducono ai punti $x_1, \ldots x_p$ e $F_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right)$ è la funzione quasi intera che caratterizza la singolarità di $f(x)$ in $x=\alpha_h$, si stabilisce la formula $\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(t)dt}{t-x}=f(x)-\sum_{1}^{p}F_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right)$, la quale è utilizzata per dedurre la nota di decomposizione di una frazione in frazioni semplici. Definita la derivata logaritmica di $f(x)$ è fatto vedere che se $f(x)$ è monodroma in un'area connessa T di contorno c ed ivi ha p poli degli ordini $m_1, m_2, \ldots m_p$ e q radici degli ordini $n_1, n_2, \ldots n_q$, l'integrale della derivata logaritmica di $f(x)$ entro c è uguale alla somma dei numeri n_h meno la somma dei numeri m_k da cui si deduce una dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra.

Sono infine fatti numerosi calcoli di integrali definiti mediante i teoremi anzidetti di CAUCHY.

Nel Cap. VIII si danno ulteriori applicazioni dei teoremi di CAUCHY. Se $\varphi(t)$ è funzione integrabile su una linea l rettificabile priva di nodi, di un sol pezzo, a distanza finita la funzione $J(x)=\int_{(l)}\frac{\varphi(t)dt}{t-x}$ e, se l è aperta, analitica in tutto il piano-sfera da cui sia tolta la linea l (taglio HERMITIANO); $J(x)$ ha il salto $2\pi i\varphi(x)$ quando x attraversa l; se l è chiusa, $J(x)$ rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica regolare entro l'area A chiusa da l, ed un ramo monodromo regolare nell'area esterna ad l; ma l'un ramo non si può ottenere dall'altro mediante la continuazione analitica. Le considerazioni precedenti sono applicate a far vedere che data una funzione $f(x)$ analitica regolare in tutto il piano-sfera tranne in luoghi di singolarità racchiudibili con un numero finito di aree ω, se l è una linea non passante per punti di ω che racchiude un'area A, $f(x)$ può considerarsi la differenza di due funzioni, l'una regolare in A, l'altra regolare in tutto il piano-sfera ad eccezione del luogo delle singolarità di $f(x)$ contenute in A. Segue una dimostrazione più rapida del teorema di WEIERSTRASS (Cap. III) e sotto condizioni meno restrittive. Dimostrato che per una funzione $f(x)$ regolare in tutto il piano tranne in una successione di punti z_h avente per unico punto limite l'infinito e per la quale sono $F_h\left(\frac{1}{x-z_h}\right)$ le funzioni quasi intere che nè caratterizzano le singolarità, sotto convenienti ipotesi, è valido uno sviluppo $f(x) = \sum_1^\infty F_h\left(\frac{1}{x-z_h}\right) + C$ ove C è una determinata costante, si applica il precedente sviluppo alla funzione cotangente. Questo dà occasione di introdurre i numeri Bernoulliani, dei quali si dà anche un'espressione mediante integrali definiti, dovuta a PLANA. Seguono alcune interessanti formule sommatorie, espressioni che permettono di valutare esattamente o con assegnabile approssimazione le somme dei valori che una data funzione assume nei punti di una determinata successione. Il Capitolo si chiude colla dimostrazione di un teorema di JENSEN che lega il valor medio di $\log|f(x)|$ sopra una circonferenza di raggio r e centro $x=0$ al valore di $f(0)$, agli zeri ed ai poli di $f(x)$ contenuti in (r).

F. SIBIRANI

(continua)