UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: H. Bohr

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.1, p. 27–29.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_27_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

H. BOHR (a Copenhagen). — *Una generalizzazione della teoria delle serie di Fourier. (Continuazione e fine).*

Per le ulteriori ricerche circa al legame fra una funzione quasi periodica e la sua serie di FOURIER $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$, è fondamentale la questione se una funzione sia *univocamente* determinata dalla sua serie di FOURIER, cioè se a due funzioni quasi periodiche corrispondano sempre due diverse serie di FOURIER; in altri termini, *se non esiste una funzione quasi periodica non identicamente nulla, di cui la serie di Fourier non contenga alcun termine,* cioè per la quale $a(\lambda)$ sia sempre nulla. Come è facile vedere, per dimostrare l'annullarsi identicamente di una funzione quasi periodica $f(x)$, basta mostrare che ne è nullo il *valor medio* $M\{|f(x)|^2\}$, e la questione proposta si riduce dunque a verificare se dalla equazione $a(\lambda) = 0$ per ogni λ, si può concludere l'equazione $M\{|f(x)|^2\} = 0$. Ma questa questione è manifestamente un caso speciale di quest'altra domanda generale: Nella disuguaglianza

$$\Sigma |A_n|^2 \leq M\{|f(x)|^2\}$$

che segue immediatamente dalla (2'), varrà sempre effettivamente il *segno di eguaglianza* come è, per il teorema di PARSEVAL, nelle serie di FOURIER ordinarie? Si mostra per l'appunto che a questa domanda è da rispondersi affermativamente, cioè *che si ha sempre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}. \tag{3}$$

Questa relazione (3) è il « *teorema fondamentale* » della teoria; essa non è di particolare interesse soltanto nel caso di $a(\lambda) = 0$ per tutte le λ, donde segue subito *il teorema di unicità*, ma dà anche un risultato assai significativo anche per il caso di una funzione quasi periodica qualunque.

Infatti, segue dall' identità

$$M\{|f(x)-\sum_{1}^{N}A_n e^{i\Lambda_n x}|^2\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_{1}^{N}|A_n|^2,$$

che il teorema fondamentale (3) è equivalente all' equazione limite

$$\lim_{N\to\infty} M\{|f(x)-\sum_{1}^{N}A_n e^{i\Lambda_n x}|^2\}=0,$$

cioè il teorema fondamentale (proprio come per le ordinarie serie di FOURIER) dice, con formulazione alquanto diversa, che *la serie di Fourier* $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *di una funzione quasi periodica* f(x) *converge sempre « in media » alla funzione* f(x). Aggiungerò che il teorema fondamentale è sostanzialmente equivalente al *teorema di moltiplicazione* delle serie di FOURIER, il quale dice che *la serie di Fourier del prodotto di due funzioni quasi periodiche si può costruire semplicemente mediante la moltiplicazione formale delle serie di Fourier dei due fattori.* La dimostrazione del teorema fondamentale si basa su una « approssimazione » appropriata delle date funzioni quasi periodiche per mezzo di funzioni periodiche propriamente dette; è però necessario all' uopo un' analisi alquanto difficile, per condurre a termine le considerazioni di continuità a ciò occorrenti.

La serie di FOURIER di una qualsiasi funzione quasi periodica converge dunque in media alla funzione. Per altro, essa può non convergere nel senso abituale; si hanno già per le funzioni veramente periodiche e continue, di quelle per le quali la corrispondente serie di FOURIER non converge dovunque. In un caso essenziale (che può in una certa guisa essere considerato come caso « generale ») si può però mostrare che la convergenza usuale, anzi assoluta ed uniforme, ha effettivamente luogo, e precisamente nel caso *in cui gli esponenti* Λ_n *sono linearmente indipendenti*, cioè in cui, per nessun intero N ha luogo una relazione della forma

$$C_1\Lambda_1+C_2\Lambda_2+\dots C_N\Lambda_N=0,$$

dove i numeri $C_1, C_2, \dots, C_N$ siano razionali non tutti nulli. Si può infatti dimostrare che in questo caso non solo converge la serie $\Sigma|A_n|^2$, ma anche la serie stessa $\Sigma|A_n|$.

In una seconda memoria sotto lo stesso titolo, sotto stampa negli « Acta Mathematica » io tratto la questione della *approssimazione uniforme* delle funzioni quasi periodiche mediante somme limitate trigonometriche $\sum_{1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}$, ed anzi della approssimazione uniforme in tutto l'intervallo infinito $-\infty < x < \infty$. Per le funzioni periodiche propriamente dette e continue, di periodo $p = \frac{2\pi}{k}$, vale il noto teorema di WEIERSTRASS, che ogni tale funzione si può approssimare uniformemente per ogni x mediante somme di un numero finito di oscillatori *armonici*, $\sum_{-N}^{N} a_n e^{inkx}$, ed io dimostro nella mia memoria il teorema, in perfetta analogia con quello di WEIERSTRASS, che *ogni funzione quasi periodica* $f(x)$ *può essere approssimata, con approssimazione* ε *arbitrariamente prefissata, mediante una somma finita* $\sum_{1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}$, *e ciò in tutto l'intervallo* $-\infty < x < \infty$. La dimostrazione, nei suoi tratti essenziali, ha una stretta relazione con un bel lavoro di P. BOHL, il quale si occupa della questione, essenzialmente più ristretta, di quelle funzioni che possono essere uniformemente approssimate da somme finite della forma speciale

$$\Sigma a_{n_1, \dots n_M} e^{i(n_1 k_1 + \dots + n_M k_M)x}$$

dove $k_1, \dots k_M$ sono numeri dati. Il significato del nostro teorema di approssimazione sta sopra tutto in ciò, che esso ci dà una *condizione ad un tempo necessaria e sufficiente* per la quasi periodicità di una funzione $f(x)$: poichè, accanto al detto teorema vale anche il *reciproco*, cioè ogni funzione che viene approssimata uniformemente da somme trigonometriche finite, è certamente quasi periodica.

Aggiungerò ancora che il concetto della quasi periodicità ed i teoremi sulle proprietà oscillatorie delle funzioni quasi periodiche può estendersi anche alle funzioni di una variabile complessa, il che getta sopratutto luce su una questione fino ad ora assai insufficientemente illuminata, circa alla natura delle funzioni che si possono sviluppare in serie di potenze « irregolari » $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$ (o serie di DIRICHLET $\Sigma a_n e^{\lambda_n s}$). (*Dall'Autore*)