# Bollettino Unione Matematica Italiana



Stanisław Saks, Antoni Szczepan Zygmund


## Un teorema sulle curve continue


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **4** (1925), n.1, p. 7–10.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_7_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

## Un teorema sulle curve continue.

Nota di S. SAKS e A. ZYGMUND (Varsavia).

1. L. TONELLI ha posto la seguente questione: ***una curva continua, avente tangente in ogni suo punto, deve necessariamente contenere un arco parziale rettificabile?***

Lo scopo di questa Nota è di dimostrare un teorema sulle curve continue, da cui, in particolare, discende la soluzione affermativa del problema di TONELLI.

Il metodo da noi seguito si riattacca strettamente a quelli impiegati da DENJOY e TONELLI nelle loro ricerche sul procedimento di *totalizzazione.*

2. *Definizione.* — Si chiama curva piana continua ogni insieme di punti determinato dalle equazioni parametriche

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

$f(t)$ e $\varphi(t)$ essendo delle funzioni continue. Noi indicheremo, in generale, con $p = p(t)$ il punto $(x, y)$ che le (1) fanno corrispondere ad un valore $t$ del parametro.

Noi diremo che una retta $s_0$ è *una tangente mediana* di lato destro (rispett. di lato sinistro), nel punto $t = t_0$ della curva (1), quando esiste una successione di punti $t_n > t_0$ (rispett. $t_n < t_0$) tendenti verso $t_0$ e tali che le rette $s_n = \overline{p_n p_0}$ (ove $p_n = p(t_n)$) [1] tendano verso la posizione di $s_0$.

Le tangenti mediane in un punto e d'un lato determinato, riempiono in generale una regione chiusa $R$, formata di due angoli opposti. Nel caso in cui esista la tangente (nel senso ordinario), $R$ si riduce ad una retta. Nel caso opposto, quando $R$ coincide con tutto il piano, noi diremo che la tangente è *completamente indeterminata dal lato e nel punto considerato.*

Diremo infine che la tangente è *completamente indeterminata nel punto* p = p(t) quando essa è completamente indeterminata dai due lati simultaneamente.

**3.** Teorema. — *Se la tangente non è completamente indeterminata in nessun punto della curva* (1), *esiste sulla* (1) *un arco parziale* C *la cui equazione, riferita ad un sistema* $(\xi, \eta)$ *di coordinate, convenientemente scelto, è della forma:*

$$\eta = g(\xi) \qquad (a \leq \xi \leq b;\ a < b),$$

*con* $g(\xi)$ *soddisfacente in* (a, b) *alla condizione di* LIPSCHITZ.

*Dimostrazione.* — Sia $\{\alpha_n\}$ la successione dei numeri razionali dell'intervallo $(0, 2\pi)$ [2] Indichiamo con $F^+_{m,n,p}$ ($m, n, p$ essendo degli interi positivi) (rispett. $F^-_{m,n,p}$) l'insieme dei valori di $t$ $(0 \leq t \leq 1)$ tali che dalla disuguaglianza

$$(2) \qquad 0 < t - t' < \frac{1}{p} \qquad \left(\text{rispett. } 0 < t' - t < \frac{1}{p}\right)$$

segua sempre

$$(3) \qquad \alpha_n - \frac{\alpha_m}{4} \leq \alpha(x, \overline{pp'}) \leq \alpha_n + \frac{\alpha_m}{4},$$

dove è $p = p(t)$, $p' = p(t')$, e $\alpha(x, \overline{pp'})$ indica la misura dell'angolo formato dalla direzione positiva dell'asse delle $x$ e dalla semiretta $\overline{pp'}$.

[1] Quando è $p_n = p_0$, il simbolo $\overline{p_n p_0}$ può indicare una retta qualunque passante per $p_0$.

[2] $2\pi$, essendo irrazionale, non appartiene alla successione $\alpha_n$; si ha perciò, per ogni $n$, $0 \leq \alpha_n < 2\pi$.

Si vede subito, tenendo conto della continuità della curva (1), che tutti gli insiemi $F^{+}_{m,n,p}$, $F^{-}_{m,n,p}$, sono *chiusi*; d'altra parte, in virtù della nostra ipotesi che in nessun punto di (1) vi sia *completa indeterminazione* della tangente, ogni punto $t$ appartiene ad uno almeno degli insiemi $F$. Dunque, per un teorema ben noto di BAIRE [1], uno almeno di questi insiemi deve contenere un intervallo parziale $(a_1, b_1)$ di $(a, b)$.

Sia, per fissare le idee, $F^{+}_{m_0, n_0, p_0}$ uno di tali insiemi. Si può evidentemente supporre che sia

$$0 < b_1 - a_1 < \frac{1}{p_0}. \tag{4}$$

Sia $C$ l'arco della curva (1) i cui punti corrispondono ai valori di $t$ contenuti nell'intervallo $(a_1, b_1)$. Cambiamo il sistema delle coordinate in modo che l'asse $\xi$ del sistema $(\xi, \eta)$ faccia con quello delle $x$, dell'antico sistema $(x, y)$, l'angolo $\alpha_{m_0}$.

Affermiamo che l'arco $C$ verifica, relativamente al sistema $(\xi, \eta)$, le condizioni del nostro teorema.

Infatti, la proiezione ortogonale dell'arco $C$ sull'asse delle $\xi$ costituisce un intervallo $(\xi_1, \xi_2)$, e scelto un punto qualunque $\xi_0$, di questo intervallo, consideriamo la retta $\xi = \xi_0$, parallela all'asse delle $\eta$. Supponiamo, se ciò è possibile, che essa tagli $C$ in due punti diversi $p$ e $p'$, corrispondenti ai due valori $t < t'$ del parametro, contenuti in $(a_1, b_1)$. Ora, per (4), (2) e (3), la secante $pp'$ deve fare, con l'asse delle $\xi$, un angolo inferiore o, al più, uguale, in valore assoluto, a $\frac{\alpha_{m_0}}{4} < \frac{\pi}{2}$; e ciò contraddice al fatto che la retta $\overline{pp'}$ sia perpendicolare all'asse delle $\xi$.

Dunque, ad ogni valore $\xi (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2)$ corrisponde un solo valore $\eta$, tale che il punto $(\xi, \eta)$ sia situato su $C$. Per conseguenza, l'equazione dell'arco $C$ può essere messa sotto la forma

$$\eta = g(\xi),$$

$g(\xi)$ essendo una funzione univoca di $\xi$.

Resta a provarsi che essa verifica la condizione di LIPSCHITZ nell'intervallo $(\xi_1, \xi_2)$. Per dimostrarlo, basta riprendere il ragionamento precedente, perchè, tenendo conto di (4) e della definizione dell'asse delle $\xi$, si ottiene, da (3), la disuguaglianza

$$\left| \frac{g(\xi') - g(\xi)}{\xi' - \xi} \right| \leq \operatorname{tg} \frac{\alpha_{m_0}}{4},$$

la quale prova la nostra asserzione, essendo $0 \leq \frac{\alpha_{m_0}}{4} < \frac{\pi}{2}$.

[1] V. per es. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914.

4. Siccome ogni arco rappresentato dall'equazione $y = g(x)$, ove $g(x)$ soddisfa alla condizione di LIPSCHITZ, è *rettificabile*, dal teorema precedentemente dimostrato segue la soluzione del problema di TONELLI, ed anche l'enunciato, più generale, seguente:

Teorema. — *Se in nessun punto* (¹) *di una curva piana continua la tangente è completamente indeterminata, esiste un sistema, ovunque denso sulla curva* (²), *di archi parziali rettificabili.*

(¹) Si vede facilmente che, affinchè questo teorema ed anche il precedente sussistano, basta supporre solamente che l'insieme dei punti $t$, nei quali la tangente è completamente indeterminata, sia di *prima categoria* di BAIRE.

(²) Vale a dire, che ogni arco parziale della curva considerata ne contiene un altro rettificabile.