BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FILIPPO SIBIRANI

Una proprietà della vita matematica

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 4 (1925), n.2, p. 60–63.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_60_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Una proprietà della vita matematica.

Nota di FILIPPO SIBIRANI

1. Con lo stesso titolo, il sig. P. MAZZONI nell'ultimo fascicolo di questo « Bollettino » pubblica una nota nella quale dimostra che, definita la vita matematica m mediante l'equazione

$$(1) \quad \int_0^m e^{-it} dt = \int_0^{\omega-x} \frac{f(x+t)}{f(x)} e^{-it} dt,$$

la derivata di m rapporto ad i è negativa.

Per dimostrare questa proprietà bastano le seguenti considerazioni.

Dalla (1) risulta subito che $m < \omega - x$. Derivando la (1) rapporto ad i si ha con semplice trasformazione

$$(2) \quad \frac{\partial m}{\partial i} = e^{mi} \left\{ \int_0^m \left(1 - \frac{f(x+t)}{f(x)} \right) t e^{it} dt - \int_m^{\omega-x} \frac{f(x+t)}{f(x)} t e^{-it} dt \right\}.$$

Per un notissimo teorema di Calcolo

$$\int_0^m \left(1 - \frac{f(x+t)}{f(x)} \right) t e^{-it} dt = t_1 \int_0^m \left(1 - \frac{f(x+t)}{f(x)} \right) e^{-it} dt \quad (0 < t_1 < m)$$

$$\int_m^{\omega-x} \frac{f(x+t)}{f(x)} t e^{-it} dt = t_2 \int_m^{\omega-x} \frac{f(x+t)}{f(x)} e^{-it} dt \quad (m < t_2 < \omega - x).$$

E poichè dalla (1) risulta

$$\int_0^m \left(1 - \frac{f(x+t)}{f(x)} \right) e^{-it} dt = \int_m^{\omega-x} \frac{f(x+t)}{f(x)} e^{-it} dt$$

è dimostrato che il secondo membro della (2) è negativo.

2. Il risultato precedente si può riguardare un caso particolare della seguente proposizione (diversa da quella data dal sig. MAZZONI nel « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », vol. LXV, pag. 597):

« Sia $\varphi(x)$ una funzione positiva in $a_1 - b$, che ivi non assuma valori maggiori di 1; sia $\psi(x, y)$ una funzione positiva con derivata rapporto ad y negativa e di più sia decrescente rispetto ad x il rapporto

$$\frac{\psi_y(x, y)}{\psi(x, y)}.$$

La funzione m di y definita dall'equazione

$$(3) \quad \int_a^m \psi(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) \psi(x, y) dx$$

ha derivata negativa ».

Intanto si deduce subito che è $a < m < b$. Derivando rapporto ad y la (3), si deduce

$$(4) \quad \frac{dm}{dy} = \frac{1}{\psi(m, y)} \left[\int_a^m \varphi(x) - 1 \mid \psi'_{y'}(x, y) dx + \int_m^b \varphi(x) \psi'_{y'}(x, y) dx \right].$$

È poi

$$\begin{aligned} \int_a^m \varphi(x) - 1 \mid \psi'_{y'}(x, y) dx &= \int_a^m \varphi(x) - 1 \mid \psi(x, y) \frac{\psi'_{y'}(x, y)}{\psi(x, y)} dx = \\ &= \vartheta_1 \int_a^m \varphi(x) - 1 \mid \psi(x, y) dx \\ &= \int_m^b \varphi(x) \psi'_{y'}(x, y) dx = \vartheta_2 \int_m^b \varphi(x) \psi(x, y) dx, \end{aligned}$$

ove ϑ_1 è compreso fra il limite inferiore ed il superiore di $\frac{\psi'_{y'}(x, y)}{\psi(x, y)}$ in $a - m$ e ϑ_2 è compreso fra il limite inferiore ed il superiore della stessa funzione in $m - b$ ed è, per le poste ipotesi, $|\vartheta_1| < |\vartheta_2|$.

Poichè dalla (3) scende

$$\int_a^m 1 - \varphi(x) \mid \psi(x, y) dx = \int_m^b \varphi(x) \psi(x, y) dx,$$

così si deduce

$$\left| \int_a^m \varphi(x) - 1 \mid \psi'_{y'}(x, y) dx \right| < \left| \int_m^b \varphi(x) \psi'_{y'}(x, y) dx \right|.$$

Ma il primo integrale è positivo, il secondo è negativo, onde dalla (4) si trae

$$\frac{dm}{dy} < 0.$$

3. Il sig. MAZZONI trova per ultimo

$$\left| \frac{\partial m}{\partial i} \right| \geq (m - p) \left(\frac{\omega - x}{2} - p \right)$$

ove p è definito da

$$\int_0^p e^{-t} dt = \int_0^{\frac{\omega-x}{2}} \frac{f(x+t)}{f(x)} e^{-t} dt.$$

Mi sembra che la diseuguaglianza sia di non grande valore, perchè di formule analoghe se ne trovano infinite. Se infatti p_2 è definito da

$$\int_0^{p_2} e^{-it} dt = \int_0^{(\omega-x)z} \frac{f(x+t)}{f(x)} e^{-it} dt,$$

con z razionale qualunque compreso fra 0 ed 1, seguendo il ragionamento fatto dall'Autore, si trova

$$\left| \frac{\partial m}{\partial i} \right| \geq (m - p_2) : (\omega - x)z - p_2.$$

Per avere una limitazione che avesse interesse, bisognerebbe trovare il massimo del secondo membro della precedente diseuguaglianza.