Bollettino Unione Matematica Italiana

Amedeo Agostini

I concetti di limite e di integrale in un allievo di Cavalieri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.3, p. 104–107.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_104_0¿

I concetti di limite e di integrale in un allievo di Cavalieri.

Nota di AMEDEO AGOSTINI

1. Il metodo degli indivisibili di CAVALIERI trovò non pochi oppositori che ne criticarono specialmente i fondamenti logici. Il CAVALIERI rispose agli oppositori nella quarta delle sue *Exercitationes geometricae*, ma — pago degli ottimi risultati ottenuti e sicuro della potenzialità del suo metodo — non si preoccupò molto di mettere in chiaro e su basi sicure i concetti di limite e di infinitesimo su cui il metodo si reggeva.

Ciò che non fece il CAVALIERI fu compiuto da un suo scolaro — PIETRO MENGOLI — il quale precisando e analizzando tali concetti e costruendo per primo una teoria dei limiti, giunse a dare (1) una rigorosa definizione dell'integrale definito per funzioni continue, definizione che coincide perfettamente colla definizione che prende il nome da CAUCHY.

2. MENGOLI considera le quantità variabili come rapporti di grandezze (*ratio indeterminata determinabilis*) e ne studia le loro proprietà allorchè la variabile indipendente tende ad un dato valore.

Le definizioni che egli da di tendenza a limite di una variabile non differiscono sostanzialmente da quelle che si danno ora e non sono certo inferiori per precisione di linguaggio alla nota definizione di NEWTON, al quale si attribuiva finora il merito di avere per primo acquisito nella sua intima essenza il concetto di limite.

Ecco le definizioni di MENGOLI tradotte, rispettando il pensiero dell'autore, in linguaggio moderno:

I) Una quantità variabile, che può essere maggiore di un qualunque numero assegnabile, si dirà *quasi infinita*;

II) Una quantità variabile positiva che può essere minore di un qualunque numero positivo, si dirà *quasi nulla*;

III) Una quantità che può essere minore di un qualunque numero maggiore di 1 e maggiore di un qualunque numero minore di 1, si dirà *quasi uno*. Ovvero, quella quantità variabile

(1) P. MENGOLI, *Geometriae speciosae elementa*, Bologna, 1659, Elementum tertium, elementum sextum. Cfr. le due note: A. AGOSTINI, *La teoria dei limiti in Pietro Mengoli* e *Il concetto d'integrale definito in Pietro Mengoli*, inserite nel vol. V (1925) del Periodico di Matematiche.

che può essere vicina ad 1 più di qualunque numero non uguale ad 1, si dirà *quasi uno*;

IV) Una quantità che può essere minore di qualunque numero maggiore di un numero positivo determinato e maggiore di un qualunque numero minore dello stesso numero determinato, si dirà che è ***quasi quel numero***;

V) I termini dei rapporti ***quasi gli stessi*** tra loro, sono tra loro *quasi proporzionali*;

VI) I termini dei rapporti che sono ***quasi uno***, sono ***quasi uguali***.

Definita così in modo preciso la tendenza a limite (1) e assunta (V) come fondamentale la proprietà del limite del quoziente, MENGOLI, partendo da semplici disuguaglianze che si possono stabilire tra rapporti numerici, dimostra le proprietà essenziali della teoria dei limiti e in particolare degli infiniti e degli infinitesimi.

3. Gli autori anteriori a MENGOLI, come LUCA VALERIO e CAVALIERI — nei quali si trova già la considerazione dei parallelogrammi inscritti e circoscritti ad una figura piana — ammettono come evidente a priori che *la figura possegga area*, portati a ciò dalla intuizione e dalla generalizzazione di risultati elementari.

È in MENGOLI che si trova invece la dimostrazione dell'esistenza dell'area di una figura piana racchiusa da curve rappresentate da funzioni continue. Ad ovviare le osservazioni che venivano fatte al considerare la superficie come costituita dall'insieme degli indivisibili, egli considera, data una funzione continua in un dato intervallo, la porzione di piano che viene ricoperta dalle ordinate della funzione: alla superficie così concepita dà il nome di *forma*.

Per dimostrare che alla *forma* corrisponde un numero, l'*area*, divide l'intervallo in cui considera la funzione in un numero n arbitrario di parti uguali e considera le seguenti figure formate da parallelogrammi costruiti sopra ciascun segmento della suddivisione:

1) la ***inscripta***, costituita dai parallelogrammi massimi inclusi nella *forma*;

2) la ***circumscripta***, data dai parallelogrammi minimi che includono la *forma*;

(1) La limitazione, contenuta in alcune definizioni, è richiesta da semplici necessità logiche, poichè MENGOLI fonda tutta la sua teoria sulle proprietà dei rapporti.

3) la *adscripta* formata dai parallelogrammi costruiti sull'ordinata corrispondente al primo estremo di ciascun segmento della suddivisione, o su quella corrispondente al secondo estremo.

Tali figure corrispondono, in notazioni moderne, rispettivamente alle sommatorie

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x_{i-1} - x_i) = s_n, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x_{i+1} - x_i) = S_n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i), \quad \text{o} \quad \sum_{i=0}^{n} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i). \tag{3}$$

Poichè MENGOLI ha in vista di dare una formula generale per gli integrali

$$\int_0^a x^r(a-x)^s dx,$$

con r ed s interi positivi, considera solo le funzioni del tipo

$$y = x^r(a-x)^s,$$

nell'intervallo $(0, a)$.

Nel caso che uno dei numeri r, s sia nullo, l'A. dimostra che la (1) è uguale ad una delle (3) e che la differenza tra la (2) e la (1) è uguale ad $\frac{La}{n}$, ove L è l'ordinata massima.

Se invece r ed s sono diversi da zero, si ha che la (2) differisce ancora dalla (1) di $\frac{La}{n}$, e che le (3) sono maggiori della (1) e ne differiscono per meno di $\frac{La}{n}$.

Quindi la *adscripta* è sempre compresa tra la *circumscripta* e la corrispondente *inscripta*, le quali differiscono per una quantità che dipende dal numero n delle suddivisioni. Allora MENGOLI mostra che dato un numero qualunque $1+\varepsilon$, con ε positivo, è sempre possibile determinare un numero intero n tale che, dividendo l'intervallo $(0, a)$ in m parti uguali, si ha sempre, per ogni $m \geq n$,

$$1 < \frac{S_m}{s_m} < 1 + \varepsilon.$$

La successione delle *inscriptae* e quella delle *circumscriptae* tendono allo stesso limite, cui tenderà anche la successione delle *adscriptae* compresa tra esse.

Ma anche la figura che MENGOLI ha chiamato *forma* è sempre compresa tra una qualunque *circumscripta* ed una qualunque *inscripta*, quindi il limite delle *adscriptae* è la *forma* (*Adscripta et forma sunt quasi aequales*).

In tale modo resta dimostrato in modo rigoroso l'esistenza dell'area della *forma*, ossia, potremo ora dire, dell'integrale definito.

La definizione di integrale di MENGOLI, coincide con quella di CAUCHY, e i procedimenti ch'egli segue e le dimostrazioni che dà si possono estendere facilmente a qualunque funzione continua.

4. PIETRO MENGOLI, fino a poco tempo fa sconosciuto nella storia delle Matematiche, vi va assumendo il posto che merita. E i risultati che abbiamo succintamente riassunti basterebbero da soli a dimostrare l'acume e la sottigliezza logica dell'allievo di CAVALIERI, e a mostrare che il periodo dello Studio bolognese che va dalla morte di CAVALIERI alla fondazione dell'« Istituto per le scienze » non fu tutto un periodo di decadenza.

Livorno, R. Accademia Navale.