
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GOFFREDO VITALI

Sulle successioni uniformemente convergenti

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 4 (1925), n.3, p. 107–109.*

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_107_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_107_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1925.

§ Sulle successioni uniformemente convergenti.

Nota di GOFFREDO VITALI

Il prof. C. A. DELL'AGNOLA in una sua nota ⁽¹⁾ ha dimostrato che *condizione necessaria e sufficiente perchè una successione*

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x), \dots$$

di funzioni continue e crescenti ⁽²⁾ della variabile x in un intervallo (a, b) , $a > b$, sia uniformemente convergente è che la (1) converga verso una funzione continua.

Che l'uniforme convergenza di (1) porti la convergenza di (1) verso una funzione continua è cosa notissima quando le $f_n(x)$ sono, come qui si suppone, continue.

⁽¹⁾ C. A. DELL'AGNOLA. *Sulle successioni uniformemente convergenti.* (R. Istituto Veneto di Sc. Lett. ed Arti, 1910-11. Tomo LXX, Parte 2^a, pagg. 383-391).

⁽²⁾ Diciamo qui e altrove *crescenti* per dire con più brevità *non decrescenti*.

Per provare che la convergenza di (1) verso una funzione continua trascina l'uniforme convergenza di (1), invece della dimostrazione del prof. DELL'ASNOLA, bastano le seguenti considerazioni molto semplici che non tengono nemmeno conto della continuità delle $f_n(x)$.

Supponiamo che la (1) converga verso una funzione continua $f(x)$. Poichè le $f_n(x)$ sono crescenti anche la $f(x)$ è crescente.

Preso un $\varepsilon > 0$, ma piccolo a piacere, è possibile, per il teorema di CANTOR, dividere il segmento (a, b) in un numero finito di parti

$$h_1, h_2, \dots, h_m$$

tali che in ciascuna di esse l'oscillazione di $f(x)$ sia minore di $\frac{\varepsilon}{3}$.

Siano

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < a_m = b$$

gli estremi di queste parti.

Poichè nei punti

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m,$$

che sono in numero finito, la (1) converge rispettivamente verso

$$f(a_0), f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{m-1}), f(a_m)$$

è possibile trovare un v tale che per ogni $n \geq v$ sia

$$(2) \quad |f_n(a_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Indichiamo con x_r un punto qualunque di h_r .

È evidentemente, per tali n , a causa di (2) e della crescenza di $f_n(x)$,

$$(3) \quad f(a_{r-1}) - \frac{\varepsilon}{3} < f_n(a_{r-1}) \leq f_n(x_r) \leq f_n(a_r) < f(a_r) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ma in h_r la $f(x)$ fa una oscillazione minore di $\frac{\varepsilon}{3}$, quindi

$$f(a_r) - f(a_{r-1}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

e perciò

$$\left(f(a_r) + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(f(a_{r-1}) - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \left(f(a_r) - f(a_{r-1})\right) + \frac{2\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vediamo così che l'intervallo $\left(f(a_r) + \frac{\varepsilon}{3}, f(a_{r-1}) - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ è di ampiezza minore di ε . Ma ~~anche~~ questo intervallo cadono $f_n(x_r)$, come risulta da (3), ed $f(x_r)$, perchè

$$f(a_{r-1}) \leq f(x_r) \leq f(a_r),$$

dunque $f_n(x_r)$ ed $f(x_r)$ differiscono in valore assoluto per meno di ε . Si ha dunque per ogni r scelto fra i numeri $1, 2, \dots, m$, per ogni x di h_r , e per ogni $n \geq \nu$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

o in altri termini per ogni $n \geq \nu$ e per ogni x di (a, b) è

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

e questo basta per affermare che la (1) è uniformemente convergente in (a, b) .

Questa è la dimostrazione che volevo presentare e che è abbastanza semplice.

Da quanto precede risulta che le due condizioni poste per le $f_n(x)$ e cioè

a) le funzioni $f_n(x)$ sono crescenti

b) le funzioni $f_n(x)$ sono continue

non intervengono mai entrambe nella dimostrazione di una qualunque delle due parti in cui si divide il teorema, poichè per dimostrare che dalla convergenza uniforme di (1) consegue la convergenza di (1) verso una funzione continua serve solo la condizione b), e per dimostrare che dalla convergenza di (1) verso una funzione continua consegue la convergenza uniforme di (1) serve solo la condizione a).

Ferrara, marzo 1925.