Giulio Bisconcini

Studio del moto incipiente di una trave pesante appoggiata su di un piano orizzontale scabro e sollecitata ad un estremo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.3, p. 109–113.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_109_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

Studio del moto incipiente di una trave pesante appoggiata su di un piano orizzontale scabro e sollecitata ad un estremo.

Nota di GIULIO BISCONCINI

1. PAINLEVÉ ha dimostrato in un tipico esempio [1] che la rigida applicazione della legge di COULOMB sull'attrito radente può condurre a risultati paradossali. Di qua discende l'interesse di ricerche tendenti da un lato a verificare fino a qual punto la

(1) Cfr. L. LECORNU: *Dynamique appliquée*, pag. 157.

legge empirica possa essere applicabile, dall'altro a stabilire quali modificazioni possano farsi nella impostazione dei problemi dinamici in quei casi in cui sembri ch'essa cada in difetto.

Un caso, anche tecnicamente interessante, in cui tutto procede in modo regolare e il moto, a partire da prefissate condizioni iniziali, risulta, senza incongruenze, univocamente determinato è l'oggetto di questo studio.

2. Ci proponiamo di determinare lo stato di moto incipiente di una trave omogenea AB poggiata su di un piano orizzontale scabro e sollecitata all'estremo B da una trazione τ. Se α è l'inclinazione della trave col suolo e β l'angolo che τ forma con la direzione orientata della proiezione orizzontale della trave, supporremo che β non sia inferiore ad α e non superi $\pi/2$.

Indicando con Q e K risultante e momento risultante delle quantità di moto e con R e Γ risultante e momento risultante delle forze esterne, le equazioni cardinali del moto sono:

$$\frac{dQ}{dt} = R, \quad \frac{dK}{dt} = \Gamma. \tag{1}$$

Sul piano verticale passante per AB si fissi un sistema cartesiano ortogonale di cui l'asse x sia la traccia col suolo del piano verticale suddetto e sia orientato in modo che risulti positiva la proiezione di AB nell'istante iniziale; l'asse y sia diretto verso l'alto e passi per la posizione iniziale di A.

Dette x, y le coordinate del baricentro G e $2l$ la lunghezza della trave, l'ipotesi che l'estremo A debba restare a contatto col suolo si traduce con la condizione che sia costantemente $y = l \sin \alpha$. Le componenti della velocità del baricentro sono perciò $\dot{x}$, $l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}$ e quelle di Q:

$$Q_x = m\dot{x}, \quad Q_y = ml \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}$$

ove s'intenda $m = p/g$, essendo p il peso della trave e g l'accelerazione di gravità.

Se T è la forza viva della trave e I il suo momento d'inerzia rispetto alla retta orizzontale che passa per G ed è normale alla trave, si ha

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I\dot{\alpha}^2.$$

Il momento risultante delle quantità di moto rispetto alla stessa retta è $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = I\dot{\alpha}$; quello rispetto alla retta parallela passante per l'origine degli assi, orientata in modo da formare con gli altri due una terna destrorsa, sarà

$$K = I\dot{\alpha} + m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

e quindi, poichè $I = \frac{1}{3}ml^2$,

$$K = ml\left(\frac{1}{3}l\dot{\alpha} + x\cos\alpha\cdot\dot{\alpha} - \sin\alpha\cdot\dot{x}\right).$$

Le forze esterne che agiscono sulla trave sono il suo peso, la trazione τ e le reazioni nei punti di appoggio col suolo, le quali si riducono a una sola forza nel caso che la trave non sia orizzontale. Di queste reazioni indicheremo con T ed N le componenti della risultante e con M il momento risultante rispetto all'asse z.

Sarà perciò:

$$R_x = \tau\cos\beta + T, \quad R_y = \tau\sin\beta + N - p$$
$$\Gamma_z = \tau(x\sin\beta + l\cos\alpha\sin\beta - 2l\sin\alpha\sin\beta) - px + M.$$

Dalle (1) si hanno quindi le equazioni scalari:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \tau\cos\beta + T, \\ ml(\cos\alpha\cdot\ddot{\alpha} - \sin\alpha\cdot\dot{\alpha}^2) = \tau\sin\beta + N - p, \\ ml\left\{\left(x\cos\alpha + \frac{l}{3}\right)\ddot{\alpha} - \sin\alpha\cdot\ddot{x} - x\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}^2\right\} = \\ \qquad = \tau(x\sin\beta + l\cos\alpha\sin\beta - 2l\sin\alpha\cos\beta) - px + M. \end{cases}$$

Risolute rispetto a $\ddot{x}$, $\ddot{\alpha}$ e $\dot{\alpha}$, forniscono:

$$(2)\quad \begin{cases} m\ddot{x} = \tau\cos\beta + T, \\ \frac{1}{3}ml^2\ddot{\alpha} = l\tau\sin(\beta - \alpha) + lT\sin\alpha - xN + M, \\ ml^2\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}^2 = l\tau\{3\cos\alpha\sin(\beta-\alpha) - \sin\beta\} + 3lT\sin\alpha\cos\alpha - \\ \qquad - (3x\cos\alpha + l)N + lp + 3M\cos\alpha. \end{cases}$$

3. Se ci limitiamo, com'è nostro proposito, allo studio del moto incipiente nel caso che la trave sia inizialmente orizzontale, dovremo supporre che le condizioni iniziali siano:

$$(3)\qquad \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad x = l, \quad \dot{x} = 0.$$

Siccome, compatibilmente col vincolo, la trave può mettersi in moto o strisciando, o rotando intorno ad A o rotando intorno ad un altro punto C della verticale di A (con che la trave si solleverebbe mentre A striscierebbe sul suolo) così siamo condotti a precisare quali devono essere le condizioni cui deve sottostare τ, perchè uno di questi tre casi possa verificarsi. Completata questa ricerca con lo studio delle condizioni di equilibrio, se risulteranno esaurite tutte le ipotesi che su τ possono farsi, resterà stabilito che lo stato di moto del nostro sistema è univocamente determinato dalla sollecitazione τ e dalle condizioni iniziali.

4. Perchè il moto incipiente sia di *strisciamento*, oltre le condizioni (3), devono verificarsi inizialmente le seguenti:

$$\ddot{x} > 0, \quad \ddot{\alpha} = 0. \tag{4}$$

Si noti poi che, siccome tutti i punti di appoggio devono muoversi, le reazioni che in essi si manifestano devono portarsi tutte sulle generatrici dei coni di attrito che si proiettano in senso opposto al moto. Se f è il coefficente di attrito, in ogni punto P_i di appoggio si avrà $T_i = -fN_i$ e conseguentemente $T = -fN$. Tenuto conto di ciò e delle (3) e (4), il sistema (2) fornisce inizialmente:

$$\begin{cases} \tau \cos\beta - fN > 0, \\ l(\tau \sin\beta - N) + M = 0, \\ l(2\tau \sin\beta - 4N + p) + 3M = 0. \end{cases}$$

Eliminando M fra le due ultime si ottiene

$$\tau \sin\beta + N - p = 0.$$

Siccome tutte le reazioni sono rivolte verso l'alto, il loro momento risultante M è, in generale positivo e può annullarsi solo nella eventualità, a priori non escludibile, che la trave venga inizialmente a gravare solo su A. La seconda equazione del sistema può essere quindi sostituita dalla relazione $\tau \sin\beta - N \leq 0$ e le condizioni che inizialmente devono essere verificate sono perciò:

$$\begin{cases} \tau \cos\beta - fN > 0, \\ \tau \sin\beta - N \leq 0, \\ \tau \sin\beta + N - p = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Se $\beta = 0$, l'ultima dà $N = p$ e la prima mostra che moto incipiente di trascinamento può aversi solo se $\tau = fp$.

Supposto $\beta > 0$, eliminando N col combinare la terza successivamente con le altre due, si ha

$$\frac{f}{\cos\beta + f\sin\beta} < \frac{\tau}{p} \leq \frac{1}{2\sin\beta}. \tag{6}$$

Questa limitazione implica che sia

$$\operatorname{tg}\beta < \frac{1}{f}. \tag{7}$$

Dunque: fissato β in modo che la (7) sia verificata, si avrà moto incipiente di trascinamento se τ sarà preso in modo da soddisfare alla (6).

(continua)