
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

G. DELLA NOCE

Confronti tra la teoria della relatività e la teoria del quanta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 4 (1925), n.3, p. 125–131.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_125_0;

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1925.

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Confronti tra la teoria della relatività e la teoria del quanta.

La teoria dei quanta, sorta nel 1900 per opera di MAX PLANK, e quella della relatività, sorta nel 1905 per opera di ALBERTO EINSTEIN, si presentano nel loro nascere in aperto contrasto. La teoria dei quanta non si accorda colle equazioni di MAXWELL-LORENTZ, nell'ipotesi fondamentale che l'energia elettromagnetica debba essere assorbita o emessa dalla materia secondo multipli di un certo quantum energetico; per contro la teoria della relatività si basa e si parte da quelle equazioni. Per questa loro origine, che già le divideva fin dall'inizio, le due teorie si sono svolte l'una indipendentemente dall'altra, tendendo del resto a scopi diversi.

La teoria della relatività, nella sua generalizzazione, si propone di connettere la metrica dello spazio-tempo, in cui avvengono i fenomeni fisici, che s'identifica col campo gravitazionale, colla materia od energia elettromagnetica presente, ma nulla dice sul come la materia determina i possibili stati della varietà spazio-tempo o campo gravitazionale; la teoria dei quanta si propone di dare una rappresentazione meccanica della ripartizione dell'energia tra la materia e l'etere. Una teoria dei quanta generalizzata, cioè una rappresentazione quantistica dello scambio d'energia tra la materia ed il campo gravitazionale, sarebbe la perfezione della fisica, analizzandone i caratteri fenomenici o relativistici ed i caratteri causali o quantistici.

Nella teoria dei quanta si ha una costante fisica nell'azione, cioè il tempo necessario alla materia per prendere o cedere un certo quantum d'energia è tanto più breve quanto più questa energia è grande, sicchè il prodotto del quantum energetico per il tempo ed in generale l'integrale dell'energia rispetto al tempo è determinato da una costante universale, detta il quantum

d'azione h , di dimensioni d'una energia per un tempo. Considerando l'irradiazione d'energia come un fenomeno periodico di durata T , l'energia E , emessa od assorbita, sarebbe in ogni caso data da $ET = h$, o multipli di h , da cui, essendo ν la frequenza corrispondente, $E = h\nu$, o multipli di $h\nu$. Così la teoria dei quanta energetici di PLANK è intimamente legata alla teoria dei quanta d'azione di SOMMERFELD. La prima non può avere nessun significato relativistico, perchè l'energia non ha alcun significato fisico assoluto, la seconda fornisce un mezzo di rilegare la teoria dei quanta alla relatività, in quanto l'azione è un invariante per la trasformazione di LORENTZ della relatività ristretta, e per la relatività generale si postula che la variazione dell'azione sia nulla per ogni piccola variazione della metrica dello spazio-tempo, cioè che la grandezza dell'azione sia un puro numero.

È noto come la teoria dei quanta porti in diversi modi alla determinazione della costante h : per esempio dall'irraggiamento termico o dai fenomeni fotoelettrici in luce visibile e ROENTGEN. D'altra parte, nella teoria della relatività generalizzata dal WEYL, s'introduce il numero azione non solo indipendentemente dalla scelta delle coordinate, ma anche dalla scelta delle unità di misura, riferendosi a certe unità che dipendono dal raggio di curvatura dell'universo in ciascun punto, dette unità assolute. Ci si potrebbe aspettare che l'azione rappresentata dal numero uno presentasse la proprietà ideale di essere un atomo indivisibile d'azione, cioè il quantum di PLANK-SOMMERFELD: per contro l'EDDINGTON trova che questo quantum non è che una frazione estremamente piccola dell'unità assoluta. L'Autore suppone che l'universo abbia una curvatura R finita e costante, ed assume come limite inferiore di R il valore 10^{25} cm., secondo alcune vedute astronomiche. Tra il tensore d'energia elettrica E_4^4 e la massa gravitazionale del campo elettrico T_4^4 , l'EDDINGTON (1) trova la relazione

$$2\pi\lambda T_4^4 = E_4^4$$

dove λ è uguale circa ad R^{-2} . Se si valuta in unità gravitazionali la massa dell'energia, si può avere l'energia del campo elettrico in unità assolute: un erg = $5,3 \cdot 10^{-99}$ cm.⁻¹ unità assolute e moltiplicando per l'unità assoluta di tempo, per cui la velocità della luce è uguale ad uno, cioè $3 \cdot 10^{10}$ cm., si ha:

1 erg. secondo = $1,6 \cdot 10^{-89}$ unità d'azione assolute.

Ma il quantum h d'azione di PLANK-SOMMERFELD è uguale a $6,55 \cdot 10^{-27}$ erg-secondi, ne segue che un quantum di PLANK-SOMMERFELD è uguale a 10^{-115} unità d'azione assoluta. Non è

possibile identificare detto quantum coll' unità naturale d'azione, il che costituisce un ostacolo all' estensione della teoria dei quanta alla relatività generale.

Un altro campo di studi, ben accetto ad alcuni antirelativisti, si propone di spiegare come effetti quantistici quei fenomeni, che si riguardano come verifiche sperimentali della teoria relativistica. Queste verifiche, come osserva lo STRANEO (²), non possono costituire la ragione fondamentale d'essere della teoria della relatività, perchè molte di esse si riferiscono a valori piccolissimi, interpretabili anche diversamente; laddove il tratto caratteristico della relatività è quello più generale ed elevato di comprensione dei fenomeni fisici, inclusi i gravifici, con concetti geometrici di spazio e tempo.

Volendo restare puramente nel campo delle verifiche sperimentali relativistiche, accanto alle spiegazioni che se ne possono dare secondo la fisica classica, si è aggiunta una spiegazione quantistica, dalla quale alcuni antirelativisti traggono la negazione della relatività, altri studiosi un'armonia delle due teorie.

Il fondatore di questa corrente di studi è stato il sig. K. FÖRSTERLING (³), proponendosi di armonizzare le due teorie col dimostrare che l'effetto DOPPLER osservabile, secondo la relatività speciale in direzione perpendicolare al movimento, e lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali, rispetto a quelle misurate fuori del campo gravitazionale, si possono dedurre dalla condizione di frequenza del BOHR e dai risultati dell' EINSTEIN, che l'energia possiede una massa inerte, ed inoltre, corrispondentemente a questa, anche una massa pesante o di gravitazione. Tali deduzioni quantistiche di effetti relativistici avrebbero il pregio della semplicità, se non s'introducesse la condizione ipotetica del BOHR, che le frequenze delle righe spettrali emesse dall'elettrone si ricavino dalle variazioni della sua energia, ed inoltre, senza considerazioni relativistiche, ipotetici sono pure i valori di massa inerte e gravitazionale dell'energia, finchè non si possano trarre direttamente dall'esperienza, mentre si tornerrebbe all'antica concezione newtoniana dello spazio e tempo assoluti. La spiegazione dell' EINSTEIN dell'effetto DOPPLER trasversale e dello spostamento verso il rosso, è ancora la più logica.

L'antirelativista sig. STJEPAN MOHROVICIC (⁴), svolgendo il concetto del FÖRSTERLING, sostiene in tono polemico che lo spostamento einsteiniano verso il rosso si può spiegare anche dal punto di vista strettamente newtoniano, trattando la luce come punto materiale; e di più, pur non associando al tempo nessun significato assoluto, ma misurandolo col numero di oscillazioni di un

punto materiale, si ha subito, senza la teoria della relatività, che l'orologio apparentemente rallenta, quando è posto in vicinanza di corpi ponderabili.

Seguendo la stessa idea dei FÖRSTERLING, il sig. GIULIO KRALL ⁽⁵⁾ osserva che la formula dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali si accorda col principio di conservazione dell'impulso in un sistema conservativo.

Ma il punto di vista del FÖRSTERLING ha ottenuto sviluppo più ampio per opera del sig. A. H. BUCHERER ⁽⁶⁾, che si propone di spiegare, senza il sussidio della relatività, oltre allo spostamento verso il rosso, anche la deviazione luminosa nel campo di gravitazione ed il movimento del perielio di Mercurio, e trae occasione per dimostrare che la differenza tra massa longitudinale e massa trasversale si manifesta anche nel campo gravifico.

Dalla formula dello spostamento verso il rosso $n = n_0 \left(1 - \frac{\mu}{rv_0^2}\right)$, dove μ è la massa, che produce il campo gravitazionale, n_0 ed n sono le frequenze del quantum luminoso rispettivamente a distanza infinita ed a distanza r dalla massa μ , l'Autore passa alla formula della velocità angolare $\frac{d\varphi}{dt}$ di un quantum rotante per l'effetto di qualche forza, poi a quella dell'energia luminosa del quantum rotante, alla distanza r da un corpo centrale, tenendo conto della variazione della sua massa, perchè il quantum rota in campo gravitazionale. Tale energia si esprime colla relazione:

$$E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)_0^2 + r^2 \left(1 - \frac{2\mu}{rv_0^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2 \right] \left(1 + \frac{rv_0^2}{\mu} \right),$$

dove gli indici 0 si riferiscono ai valori della velocità radiale $\frac{dr}{dt}$ ed angolare $\frac{d\varphi}{dt}$ fuori del campo gravitazionale.

Un raggio luminoso rappresenta una corrente energetica o di massa, ed il suo movimento si determina uguagliando la sua energia, espressa dalla relazione sovrastante, alla sua massa m moltiplicata per il quadrato della velocità della luce, cioè mv_0^2 oppure $v_0^2 \left(1 + \frac{\mu}{rv_0^2} \right)$. Si elimina t col teorema delle aree, mentre si trova il valore della costante delle aree colla condizione che al minimo valore di r corrisponda per esempio il raggio solare. Allora per un raggio luminoso, che provenga dall'infinito, rasenti il sole e ritorni all'infinito, si ottiene la deviazione totale di EINSTEIN di 1,7 secondi.

L'Autore poi, per studiare il movimento del perielio di Mercurio, generalizza la formola superiore dell'energia del quantum luminoso, con un'estensione, che mi sembra molto ardita, quantunque giustificata dal vecchio aforisma che il grandissimo deve esser costruito come il piccolissimo, e dalle recenti costruzioni atomiche planetarie del BOHR: l'estensione consiste nell'ammettere che le masse della materia usuale e degli astri abbiano lo stesso comportamento quantistico che le masse dei quanta luminosi. Quindi l'energia cinetica di un pianeta nel campo gravitazionale della massa solare ha ancora la stessa espressione che quella vista del quantum; aggiungendo l'incremento dell'energia potenziale dall'infinito alla distanza r , si ha la costante dell'energia $-K$. Ne segue la relazione:

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{rv_0^2} \right) \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)_0^2 + r^2 \left(1 - \frac{2\mu}{rv_0^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2 \right] = - \int_{\infty}^r \frac{\mu}{r^2} \left(1 + \frac{\mu}{rv_0^2} \right) dr - K.$$

Eliminando t ancora col teorema delle aree, si ottengono 36'' in un secolo per il movimento del perielio di Mercurio. Non è questo il risultato numerico di EINSTEIN, ma si osservi che i valori dati sopra si riferiscono ad un osservatore all'infinito oppure fuori del campo di gravità del solé. Ma noi siamo sulla terra alla distanza ρ dal sole. Allora la frequenza del quantum luminoso in Mercurio varia secondo l'equazione $n = n_\rho \left(1 - \frac{\mu}{rv_0^2} + \frac{\mu}{\rho v_0^2} \right)$, perchè il quantum è trasportato soltanto dalla distanza ρ alla distanza r , guadagnandosi così un certo lavoro. Ne segue, colla solita estensione, che la massa di Mercurio m è legata alla sua massa osservata nella terra m_ρ , dalla relazione $m = m_\rho \left(1 + \frac{\mu}{rv_0^2} - \frac{\mu}{\rho v_0^2} \right)$, quindi la forma dell'energia sarebbe:

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{rv_0^2} + \frac{\mu}{\rho v_0^2} \right) \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)_0^2 + r^2 \left(1 - \frac{2\mu}{rv_0^2} + \frac{2\mu}{\rho v_0^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2 \right] = \quad (1) \\ = - \int_{\infty}^r \frac{\mu}{r^2} \left(1 + \frac{\mu}{rv_0^2} \right) dr - K.$$

Risolviendo quest'equazione si ottengono 30'',4 per cento anni terrestri.

(1) Nel testo è data soltanto l'equazione approssimata.

Dévesi però introdurre ancora una correzione. Evidentemente la relazione $n = n_2 \left(1 - \frac{\mu}{rv_0^2} + \frac{\mu}{\rho v_0^2} \right)$ suppone che l'osservatore, in riposo sulla terra, paragoni il suo orologio con un orologio pure in riposo su Mercurio, ma l'osservatore terrestre ha una velocità relativa di traslazione $u\rho$ rispetto a Mercurio, cioè l'orologio in Mercurio, che si può simbolizzare con una lancetta uguale al raggio sole-Mercurio, va più adagio nel rapporto

1: $\sqrt{1 - \frac{u^2}{v_0^2}}$. Con questa correzione si ottengono 33 secondi di rotazione della traiettoria di Mercurio in 100 anni terrestri, cioè un valore circa 3" più piccolo di quello di EINSTEIN.

Aggiunge l'Autore che nella sua formula dell'energia sono incluse due forme di massa: quella che entra nel contributo radiale è la massa longitudinale; quella che entra nel contributo rotazionale è quella trasversale. Quest'ultima è dovuta all'inerzia dell'energia cinetica del corpo rotante attorno ad un centro, l'altra è analoga a quella assunta da un quantum luminoso proveniente dall'infinito e penetrante radialmente nel campo gravitazionale. Quindi sarebbe necessario, secondo l'Autore, quando si voglia introdurre nella teoria generale o gravitazionale della relatività il concetto di massa, fare una distinzione tra massa longitudinale e massa trasversale. E qui l'Autore, citando un passo del FÖRSTERLING (7), in cui in un campo gravitazionale statico si ottiene come massa di un elettrone la massa longitudinale dell'Autore, ed un altro passo del LAUE (8), in cui si assume invece pure in campo gravitazionale statico la massa trasversale sopraddetta, esorta i relativisti a decidersi quale massa vogliano introdurre nella relatività generale.

La spiegazione di questo disaccordo tra le deduzioni relativistiche del FÖRSTERLING e del LAUE per la massa dell'elettrone in campo gravitazionale statico risiede nello stesso campo della relatività e dipende da diversa assunzione della massa; il BUCHERER, fuori del campo relativistico, non dà una spiegazione, ma mette in rilievo una coincidenza, a cui si giunge colla sua teoria quantistica.

Gli accordi già rilevati dal FÖRSTERLING ed illustrati dal BUCHERER tra la teoria della relatività e quella dei quanta fanno sperare che nuovi progressi nel campo teorico e pratico possano spiegare il contrasto tra le masse, rilevato dal BUCHERER, e quello più profondo dell'EDDINGTON per i valori del quantum unitario d'azione. Il successo teorico della teoria della relatività e quello sperimentale della teoria dei quanta inducono a non

rigettare nè l'una nè l'altra teoria, bensì al desiderio di fonderle. Nonostante la loro diversa origine ed il loro diverso cammino, un fatto recenté pone in luce l'utilità di riunire i loro risultati: i fenomeni della struttura fina delle righe spettrali in luce visibile e ROENTGEN sono esattamente interpretati introducendo per la teoria dei quanta la nota quantizzazione delle orbite degli elettroni attorno ai nuclei atomici, ed insieme ammettendo che il moto degli elettroni nell'atomo avvenga secondo la teoria della relatività. Si è avverato così un successo quantitativo, relativistico e sperimentale, che illustra l'idea dell'unità della scienza.

g. d. n.

BIBLIOGRAFIA

- (1) A. S. EDDINGTON: *Espace, temps et gravitation*, 1921, 2^a parte, pag. 146.
- (2) PAOLO STRANEO: *Teoria della relatività*. Roma, Libreria Bardi, 1924, pag. 147.
- (3) K. FÖRSTERLING: *Zeitschrift für Physik*, 11 novembre 1920.
- (4) STJEPAN MOHROVICIC: « *Annalen der Physik* », 1921.
- (5) GIULIO KRALL: « *Nuovo Cimento* », n. 2 del 1922 e « *Arduo* » n. 4 dello stesso anno.
- (6) A. H. BUCHERER: « *Annalen der Physik* », 3 marzo e 20 maggio 1922.
- (7) K. FÖRSTERLING: Lo stesso lavoro della nota (3) alla pag. 406.
- (8) V. LAUE: *Relativitätstheorie*, II^o, 1921, pag. 165.