Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Fubini

Applicabilità proiettiva di due superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.3, p. 97–99.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_97_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

PICCOLE NOTE

Applicabilità proiettiva di due superficie.

Nota di GUIDO FUBINI

Useremo qui i simboli abituali della geometria differenziale metrica euclidea, usati nelle classiche lezioni del prof. BIANCHI. Nelle mie prime ricerche di geometria proiettiva (*Applicabilità proiettiva di due superficie*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1916, Tomo 41) io ho dimostrato che: *Due superficie in corrispondenza biunivoca, i cui punti omologhi sono individuati dagli stessi valori delle coordinate curvilinee* $u_1 = u$, $u_2 = v$, *sono proiettivamente applicabili soltanto se*:

a) *sulle due superficie si corrispondono le asintotiche,*

b) *sulle due superficie hanno uguali valori le*:

$$C_1 = \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right] + 2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{D'}{D} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{D}{D''};$$

$$C_2 = \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] + 2\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{D'}{D''} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{D''}{D}.$$

Questi valori di C_1, C_2 sono esatti se $DD'' \neq 0$; se invece p. es. $D = D'' = 0$, al loro posto si dovrebbero scrivere le $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}$. Lascio al lettore il caso $D = 0$, $D' \neq 0$ oppure $D \neq 0$, $D'' = 0$.

Mentre il significato geometrico di *a*) è evidente, ciò non è per *b*). Soltanto se $D = D'' = 0$, cioè se le u, v sono asintotiche, le $C_1 = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}$ e $C_2 = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}$ hanno un chiaro significato: che *il loro annullarsi è la condizione perchè le* u, v *siano anche geodetiche e quindi rette.* Nel caso generale non riuscii a trovare un significato geometrico per C_1 e C_2; significato che è dato nella presente nota. Posto:

$$\delta^2 u_i = d^2 u_i + \begin{Bmatrix}11\\i\end{Bmatrix} du^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\i\end{Bmatrix} du\,dv + \begin{Bmatrix}22\\i\end{Bmatrix} dv^2,$$

la curvatura geodetica è, a meno d'un fattore *finito*, uguale al quoziente di

$$du_1\delta^2u_2 - du_2\delta^2u_1 = dud^2v - dvd^2u + B$$

per ds^3, ove

$$B = \Sigma b_{rst}du_rdu_sdu_t = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} du^3 + \left(2\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}\right) du^2dv +$$

$$+ \left(\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}\right) dudv^2 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} dv^3.$$

Dividendo B per $Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$, si trova (se $DD'' \neq 0$)

$$B = (Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2)\left[\frac{\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}}{D} du - \frac{\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}}{D''} dv\right] +$$

$$+ dudv[C_2dv - C_1du].$$

L'essere $C_2 = C_1 = 0$ *è la condizione affinchè* B *sia divisibile per* $Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$.

Indicando con x', y', z' coordinate correnti, con x_i, x_{rs} ecc. derivate *covarianti* rispetto all'elemento lineare di Gauss, la equazione del piano osculatore ad una linea della superficie è (¹)

$$0 = \begin{vmatrix} x' - x \\ \Sigma x_i du_i \\ \Sigma x_i\delta^2u_i + \Sigma x_{rs}du_rdu_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' - x \\ x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} (du\delta^2v - dv\delta^2u) +$$

$$+ (Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2)\begin{vmatrix} x' - x \\ \Sigma x_i du_i \\ X \end{vmatrix}.$$

Posto dunque

$$T = \begin{vmatrix} x' - x \\ x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad N_1 = \begin{vmatrix} x' - x \\ x_1 \\ X \end{vmatrix}, \quad N_2 = \begin{vmatrix} x' - x \\ x_2 \\ X \end{vmatrix},$$

la $T = 0$ è l'equazione del piano tangente alla superficie, la $N_1 = 0$ ($N_2 = 0$) è l'equazione del piano normale passante per la tangente alla $v = \text{cost}$ (alla $u = \text{cost}$). E l'equazione del prece-

(¹) In quanto segue compaiono determinanti, di cui è scritta la prima colonna; le altre due se ne deducono scrivendo y e z al posto della x.

dente piano osculatore è

$$T(du d^2v - dv d^2u + B) + (Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2)(N_1 du + N_2 dv) = 0.$$

Consideriamo le linee $au + bv + c = 0$ (a, b, c = cost. arbitrarie); per esse $dud^2v - dvd^2u = 0$ *L'essere* $C_1 = C_2 = 0$ *è* (per il teorema precedente) *la condizione affinchè i piani osculatori alle linee uscenti da un punto della nostra superficie e soddisfacenti alla* $\frac{d^2v}{du^2} = 0$ (cioè legate da una equazione $au + bv + c = 0$) *formino un fascio* (il fascio dei piani $N_2 - \frac{\left\{ {22 \atop 1} \right\}}{D'} T = 0$ ed $N_1 + \frac{\left\{ {11 \atop 2} \right\}}{D} T = 0$):

più brevemente affinchè *tali linee formino un sistema assiale* (secondo la denominazione del Bompiani) [1].

Nel caso più generale invece tali piani osculatori inviluppano un cono di terza classe, i cui tre piani cuspidali concorrono in *una retta*; questa retta è la normale (metrica) *soltanto quando la forma* B *è apolare a* $Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$ (cioè ha un Hessiano proporzionale a quest'ultima forma). Per brevità ometto la facilissima dimostrazione.

Infine, se $C_1 = C_2 = 0$ e inoltre B soddisfa a quest'ultima condizione, i piani osculatori $\left(\text{alle curve per cui } \frac{d^2v}{du^2} = 0\right)$ in un punto formano un fascio che ha per asse la normale; cioè queste curve sono le geodetiche. Le superficie corrispondenti si possono dunque rappresentare geodeticamente sul piano, e per un teorema del Dini, esse sono perciò superficie a curvatura costante.

Osservazione. — Si deduce facilmente: *Se la proprietà che le* u, v *formino un sistema assiale, si conserva, cambiando i parametri delle linee* u, v, *cioè se le linee* $a\varphi(u) + b\psi(v) + c = 0$ (*a*, *b*, *c* costanti arbitrarie) *formano un sistema assiale, comunque siano scelte le funzioni* φ, ψ, *le* u, v *sono asintotiche*, $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = \left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0$, *e quindi la superficie è una quadrica, di cui le linee* u, v *sono le generatrici.*

[1] E se ne può dedurre facilmente che l'uguaglianza di C_1 e C_2 sulle due superficie su cui già si corrispondono le asintotiche caratterizza le corrispondenze che conservano i sistemi assiali, e quindi, per il teorema di Cech, sono proiettivamente applicabili; e che anzi il corrispondersi delle asintotiche e di un solo sistema assiale di curve porta con sè l'applicabilità proiettiva e quindi il corrispondersi di tutti i sistemi assiali.