Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Fubini

Una osservazione sulla quadrica di Lie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.4, p. 151–152.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_151_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

Una osservazione sulla quadrica di Lie.

Nota di Guido Fubini

La seguente osservazione è di carattere affatto elementare.

Siano x coordinate di punto, funzioni di due parametri u, v. Al variare di questi il punto descriva una superficie non sviluppabile; e ne siano ξ le coordinate del corrispondente piano tangente. Recenti studi hanno dimostrato essere assai utile fissare il fattore di proporzionalità di queste ultime in guisa che valga la seguente uguaglianza di determinanti:

$$(1) \qquad (x,\ x_u,\ x_v,\ d^2x) = (\xi,\ \xi_u,\ \xi_v,\ d^2\xi)\ (^1).$$

Sia A un punto fisso della superficie e siano x, x_u, ξ, ξ_u ecc. i valori *ivi* calcolati delle coordinate di punto e di piano tangente e loro derivate. Se X è una combinazione lineare generica delle derivate seconde delle x, e Ξ la omologa delle ξ, un punto x' e un piano qualunque ξ' dello spazio hanno coordinate che si possono scrivere nella forma:

$$x' = y_1 x + y_2 x_u + y_3 x_v + y_4 X; \quad \xi' = \eta_1 \xi + \eta_2 \xi_u + \eta_3 \xi_v + \eta_4 \Xi.$$

Cech ha osservato che:

Se vale la (1), *la correlazione definita dalle* $y_i = \eta_i$ *è la polarità rispetto alla quadrica di Lie* (relativa al punto A).

Ora ci chiediamo: che cosa avviene se non è soddisfatta la (1)? In tal caso indicheremo con $\bar\xi$ le coordinate di piano tangente. E sarà $\bar\xi = \rho\xi$, ove ρ è un fattore di proporzionalità generalmente funzione di u, v, e le $\bar\xi$ si potranno ancora supporre soddisfare alla (1). In tal caso, assunte per semplicità a linee coordinate le asintotiche, ogni punto x' ed ogni piano ξ' dello spazio avranno coordinate che si possono scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} x' &= y_1 x + y_2 x_u + y_3 x_v + y_4 x_{uv}, \\ \xi' &= \eta_1 \bar\xi + \eta_2 \bar\xi_u + \eta_3 \bar\xi_v + \eta_4 \bar\xi_{uv} = \rho\eta_1\xi + \eta_2(\rho\xi_u + \xi\rho_u) + \\ &\quad + \eta_3(\rho\xi_v + \xi\rho_v) + \eta_4(\rho\xi_{uv} + \rho_v\xi_u + \rho_u\xi_v + \rho_{uv}\xi). \end{aligned}$$

(1) È scritta tra ( ) una riga di tali determinanti; ognuna delle quattro coordinate omogenee di punto o di piano determina una delle quattro loro righe.

La espressione $\Sigma x'\xi'$ vale il prodotto del fattore $\rho^{\varphi}\xi x_{uv}$ per

$$y_1\eta_4 + y_4\eta_1 - y_2\eta_3 - y_3\eta_2 + \Omega y_4\eta_4 + \frac{\rho_{uv}}{\rho} y_4\eta_4$$
$$+ \frac{\partial \log \rho}{\partial u}(y_4\eta_2 - \eta_4 y_2) + \frac{\partial \log \rho}{\partial v}(y_4\eta_3 - \eta_4 y_3) = \Sigma y_i Y_i$$

ove Ω è una quantità che qui è inutile precisare, e dove le Y sono le coordinate di piano in quel sistema coordinato, ove le y sono coordinate di punto. Sarà pertanto:

$$Y_1 = \eta_4, \qquad Y_3 = -\eta_3 - \mu\eta_4$$
$$Y_2 = -\eta_3 - \lambda\eta_4, \quad Y_4 = \eta_1 + \lambda\eta_2 + \mu\eta_3 + \sigma\eta_4$$

(è posto:

$$\lambda = \frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \quad \mu = \frac{\partial \log \rho}{\partial v}, \quad \sigma = \frac{\rho_{uv}}{\rho}\Bigg).$$

Dunque: *I punti che giacciono nel piano che ad essi corrisponde nella correlazione* $\eta_i = y_i$ (cioè i punti per cui $\Sigma x'\xi' = 0$, quando $\eta = y$) *sono i punti di una quadrica di* DARBOUX

$$2(y_1y_4 - y_2y_3) + \Omega y_4^2 + \sigma y_4^2 = 0$$

appartenente al fascio determinato dal piano tangente $y_4^2 = 0$ *contato due volte e dalla quadrica di* LIE

$$2(y_1y_4 - y_2y_3) + \Omega y_4^2 = 0.$$

Le correlazioni $y_i = \eta_i$ *sono una polarità soltanto se* $\rho =$ cost., *ossia se i due membri di* (1) *differiscono per un fattore costante, e in tal caso questa polarità è precisamente la polarità rispetto alla quadrica di* LIE.

Osservando poi che p. es. la reciprocità (degenere)

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = -y_4, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = y_2$$

fa corrispondere ad ogni punto y il piano Y che lo proietta dalla tangente asintotica $y_2 = y_4 = 0$, abbiamo:

Nel caso più generale, le reciprocità $y_i = \eta_i$ *sono combinazioni lineari della polarità rispetto ad una delle citate quadriche di* DARBOUX *e di (due) sistemi nulli degeneri, che ad ogni punto* y *fanno corrispondere il piano* Y *che lo proietta da una tangente asintotica.*

Gli stessi risultati si dimostrano in modo affatto simile anche per le ipersuperficie e le corrispondenti quadriche, con cui CECH ha generalizzato la quadrica di LIE.