N. Abramescu

Sulle relazioni ricorrenti di ordine infinito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.4, p. 155–158.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_155_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

Sulle relazioni ricorrenti di ordine infinito.

Nota di N. ABRAMESCU

1. $P_0(x)$, $P_1(x)$,... $P_n(x)$,... essendo una successione di polinomi ottenuti con la relazione ricorrente

$$(1) \qquad Q_k P_{n+k} + Q_{k-1} P_{n+k-1} + \dots + Q_0 P_n = 0,$$

dove Q_s sono polinomii interi in n e x dello stesso grado p in n, si sa [1] che

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}$$

[1] POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal of Mathematics, vol. VII, p. 201-258; 1884); PINCHERLE, *Sui sistemi di funzioni analitiche...* (Annali di Matematica, serie II, tomo XII). Questo rapporto $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ serve nello studio delle serie di polinomi di una variabile complessa. Vegg. N. ABRAMESCO, *Sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1922, p. 77-84).

tende, in generale, verso la radice del maggior modulo dell'equazione

$$F(\lambda) = \lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + A_1\lambda + A_0 = 0,$$

$$A_q = \lim_{n \to \infty} \frac{Q_k}{Q_s}.$$

Si può ottenere anche l'equazione differenziale

$$T_p \frac{d^p y}{dz^p} + T_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \dots + T_1 \frac{dy}{dz} + T_0 y = S, \tag{2}$$

alla quale soddisfa la funzione

$$y = P_0 + P_1 z + \dots + P_m z^m + \dots \tag{3}$$

Si vede che, se il grado p è grandissimo, cioè se Q_s sono funzioni intere di n, l'equazione differenziale (2) alla quale soddisfa la funzione (3), è di ordine infinito.

2. Consideriamo adesso una relazione ricorrente di ordine infinito (1),

$$aP_{n+1}(x) = xP_n(x) - a_1 P_{n-1}(x) - \dots - a_{n-1}P_1(x) + (n+1)a_n, \tag{4}$$

$$P_0 = 1, \quad P_1 = -\frac{x}{a}, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$$

e proponiamoci di trovare il limite del rapporto $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ per $n \to \infty$.

Essendo date le relazioni (4),

$$\begin{aligned} &aP_1 = -x, \\ &aP_2 - xP_1 = 2a_1, \\ &aP_3 - xP_2 + a_1 P_1 = 3a_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &aP_{n+1} - xP_n + a_1 P_{n-1} + \dots + a_{n-1}P_1 = (n+1)a_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5}$$

risulta che, x appartenendo a un determinato campo di conv-

(1) Questa questione è in relazione con la mia nota, *Su una classe di serie di polinomii di una variabile complessa* (Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, vol. XXXI, serie 5ª, 1º sem., 1922, p. 197-201). P_n sono i polinomi del sig. FABER; vegg. FABER, *Ueber polynomische Entwikelungen* (Math. Annalen, Bd. 57, 1903, p. 389; Bd. 64, 1907, p. 118), N. ABRAMESCO, *Sur les séries de polynomes à une variable complexe, Séries de M. Faber* (Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, t. I, fasc. 1, p. 60; 1921).

genza, la serie in Z (Z abbastanza piccolo)

$$(6)\qquad P_1 + ZP_2 + \dots + Z^n P_{n+1} + \dots$$

è il quoziente di due serie,

$$(7)\qquad \frac{c_1 + c_2 Z + \dots + c_{n+1} Z^n + \dots}{b_1 + b_2 Z + \dots + b_{n+1} Z^n + \dots} = P_1 + ZP_2 + \dots + Z^n P_{n+1} + \dots,\ b_1 \neq 0.$$

Da cui, per identificazione, le relazioni trovate

$$\begin{aligned} &P_1 b_1 = c_1, \\ &P_2 b_1 + P_1 b_2 = c_2, \\ &P_3 b_1 + P_2 b_2 + P_1 b_3 = c_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

devono essere le relazioni (5). Quindi

$$\begin{aligned} &c_1 = -x, \quad c_2 = 2a_1, \quad c_3 = 3a_2, \dots\ c_{n+1} = (n+1)a_n, \dots \\ &b_2 = a, \qquad b = -x, \ b_3 = a_1, \dots\ b_{n+1} = a_{n-1}, \dots \end{aligned}$$

e la relazione (7) diviene

$$\frac{-\dfrac{a}{Z^2} + \varphi'(Z)}{\dfrac{a}{Z} + \varphi(Z) - x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \dots,$$

$$\varphi(Z) = a_1 Z + \dots + a_n Z^n + \dots, \quad \varphi'(Z) = \frac{dZ}{d\varphi},$$

la funzione $\varphi(Z)$ essendo olomorfa nel cerchio di raggio $\frac{1}{r}$.

Ponendo

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z),$$

abbiamo lo svolgimento

$$(8)\qquad \frac{z'}{z-x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \dots, \quad z' = \frac{dz}{dZ},$$

valevole per i punti x interiori a un determinato campo di convergenza.

Però, la serie $P_1(x) + ZP_2(x) + \dots$, oppure $\Sigma Z^n P_n(x)$, ha per raggio di convergenza

$$|Z| = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|}}$$

e lo svolgimento (8) è valevole solo per i punti x interiori alla curva (Γ) ottenuta con la trasformazione [1]

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z). \tag{9}$$

Dunque

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{1}{|Z|},$$

$$x = \frac{a}{Z} + a_1 Z + \dots + a_n Z^n + \dots$$

Ma, se per la serie $\Sigma P_n Z^n$, l'espressione $\sqrt[n]{|P_n|}$ ha un limite, allora abbiamo

$$\lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = \lim \sqrt[n]{|P_n|}$$

e quindi

$$\lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = \frac{1}{|Z|},$$

$$x = \frac{a}{Z} + a_1 Z + \dots + a_n Z^n + \dots$$

Università di Cluj (Romania), luglio 1925.

[1] Questa questione è in legame con la mia nota, *Sur les courbes de convergence des séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 180, 1925; p. 566-569).