Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Fantappiè

le operazioni distributive esprimibili con un numero finito di operazioni elementari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.4, p. 158–162.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_158_0¿

Le operazioni distributive esprimibili con un numero finito di operazioni elementari.

Nota di LUIGI FANTAPPIÈ.

1. Secondo le usuali definizioni diremo che un'operazione funzionale F, che a ogni funzione $y(t)$ analitica fa corrispondere un'altra funzione $f(z)$, pure analitica, è ***distributiva*** o ***lineare*** se per a e b costanti qualsiasi è sempre

$$(1) \qquad F[ay_1(t) + by_2(t)] = aF[y_1(t)] + bF[y_2(t)].$$

Per indicare che la F, oltre che dalla natura della $y(t)$, dipende anche dal valore di z, scriveremo

$$F_t[y(t);\, z] = f(z)$$

ove la t in basso sta ad indicare che se nella y comparissero, oltre t, altre variabili $\alpha, \beta, \ldots$, queste ultime dovrebbero pensarsi come costanti e la F andrebbe applicata alla y considerando questa come funzione della sola t. È da osservare che, colle nostre notazioni, il risultato $f(z)$ dell'operazione non dipende più dalla variabile apparente t; come p. es., nell'operazione lineare

$$f(z) = \int_a^b K(z, t) y(t) dt$$

la $f(z)$ non dipende più dalla variabile t d'integrazione. Per maggiori notizie sulle operazioni distributive rimando poi all'opera dei prof. PINCHERLE e AMALDI [1].

2. In una mia recente nota [2] ho fatto vedere come tutte le proprietà di un'operazione distributiva F possano essere studiate attraverso le proprietà di una certa funzione $v(z, \alpha)$ di due variabili complesse, perfettamente individuata, una volta data l'operazione F, da

$$v(z, \alpha) = F_t\left[\frac{1}{t - \alpha}; z\right] \tag{2}$$

$\left[\text{risultato della } F \text{ applicata alla funzione particolare } y(t) = \frac{1}{t - \alpha}\right]$ e che a sua volta individua l'operazione F mediante la formula

$$f(z) = F_t[y(t); z] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(z, t) y(t) dt \tag{3}$$

essendo la C una curva chiusa della sfera complessa t che contiene nel suo interno tutti i punti singolari di $y(t)$ (compreso $t = \infty$ se, pur essendo regolare per la y, questa è ivi $\neq 0$), ma lascia all'esterno tutti quelli della $v(z, t)$ (considerata come funzione di t). Così, p. es., i punti singolari della $f(z)$ sono quelli delle funzioni $v(z, t_1)$, $v(z, t_2), \ldots$ se $t_1, t_2, \ldots$ sono i punti singolari della $y(t)$, da cui il nome di *indicatrice dei punti singolari* dato alla $v(z, \alpha)$.

3. Ricordando allora che, secondo una definizione del professor PINCHERLE (op. citata), si chiamano *operazioni elementari*

[1] S. PINCHERLE e U. AMALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*. Zanichelli, Bologna, 1901.

[2] L. FANTAPPIÈ, *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità*. Rend. R. Acc. Lincei, Vol. I, s. 6, sem. 1°, 1925.

le tre operazioni di *derivazione*, *sostituzione* (relativa a una funzione fissa $\nu(z)$), *moltiplicazione* (di moltiplicatore fisso $\mu(z)$), ci si può proporre il problema di riconoscere quando un' operazione distributiva F, data sotto una forma qualsiasi, p. es. mediante una serie di PINCHERLE

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{\alpha_n(z)}{n!} y^{(n)}(z)$$

sia in realtà esprimibile con un *numero finito* di operazioni elementari, le sole che praticamente siano sempre effettivamente eseguibili. Dimostriamo a questo fine il seguente teorema, che risolve completamente la questione:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un' operazione lineare F *sia esprimibile mediante un numero finito di operazioni elementari (derivazioni, sostituzioni, moltiplicazioni) è che la sua indicatrice* $v(z, \alpha)$ *dei punti singolari sia una funzione razionale di* α *che si annulli per* $\alpha = \infty$.

Se infatti la F è esprimibile con un numero finito di operazioni elementari, si avrà

$$F_t[y(t);\ z] = \sum_{1}^{p}{}_i \sum_{0}^{r_i}{}_j \mu_{ij}(z) y^{(j)}(\nu_i(z)) \tag{4}$$

e ricordando che l'indicatrice dell'operazione di derivazione $f(z) = D^n y(z)$ è

$$v_d(z, \alpha) = D_z^{\,n} \frac{1}{z-\alpha} = \frac{(-1)^n n!}{(z-\alpha)^{n+1}}$$

l'indicatrice dell'operazione di sostituzione $f(z) = y(\nu(z))$ relativa a $\nu(z)$ è

$$v_s(z, \alpha) = \frac{1}{\nu(z) - \alpha}$$

e l'indicatrice dell'operazione di moltiplicazione $f(z) = \mu(z) y(z)$ di moltiplicatore μ è

$$v_m(z, \alpha) = \frac{\mu(z)}{z - \alpha}$$

avremo, per l'indicatrice della nostra operazione (4), sostituendo, secondo la definizione (2), la funzione particolare $\dfrac{1}{t-\alpha}$ alla generica $y(t)$

$$v(z, \alpha) = \sum_{1}^{p}{}_i \sum_{0}^{r_i}{}_j \mu_{ij}(z) \frac{(-1)^j j!}{[\nu_i(z) - \alpha]^{j+1}} \tag{5}$$

che è evidentemente una funzione razionale di α che si annulla per $\alpha = \infty$.

Supponiamo, viceversa, che l'indicatrice $v(z, \alpha)$ di un'operazione lineare F sia razionale rispetto al parametro α e si annulli per $\alpha = \infty$, sia cioè

$$v(z, \alpha) = \frac{P(z, \alpha)}{Q(z, \alpha)}$$

essendo P e Q polinomi in α, con coefficienti funzioni analitiche di z, ed il grado m di P inferiore al grado n di Q. Decomponiamo Q in fattori lineari (rispetto ad α)

$$(6) \qquad Q = a_0(z)[\alpha - \nu_1(z)]^{r_1}[\alpha - \nu_2(z)]^{r_2} \dots [\alpha - \nu_p(z)]^{r_p}$$
$$r_1 + r_2 + \dots + r_p = n$$

e la frazione $\frac{P(z, \alpha)}{Q(z, \alpha)}$ (che ha il numeratore di grado inferiore a quello del denominatore) in frazioni elementari; sarà

$$(7) \qquad \frac{P(z, \alpha)}{Q(z, \alpha)} = \sum_{1}^{p}{}_k \sum_{1}^{r_i}{}_j \frac{m_{kj}(z)}{[\alpha - \nu_{kj}(z)]^j}.$$

A causa della formula (3) avremo allora, per il valore $f(z)$ della nostra funzionale F, applicata ad una qualsiasi funzione y

$$f(z) = F_t[y(t); z] = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(z, t)y(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P(z, t)}{Q(z, t)} y(t)dt = \sum_{1}^{p}{}_k \sum_{1}^{r_i}{}_j \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{m_{kj}(z)}{[t - \nu_k(z)]^j} y(t)dt$$

essendo C una curva chiusa contenente nel suo interno tutti i punti singolari di y ma nessuno dei punti $t = \nu_k(z)$ singolari per la $v(z, t)$; e quindi, invertendo il senso d'integrazione, avremo infine, per la formula di CAUCHY,

$$(8) \qquad f(z) = F_k[y(t); z] = - \sum_{1}^{p}{}_k \sum_{1}^{r_i}{}_j \frac{m_{kj}(z)}{(j-1)!} y^{(j-1)}(\nu_k(z)).$$

La $f(z)$ si ottiene cioè dalla y mediante un numero finito di operazioni elementari; più precisamente, in corrispondenza a ogni polo $\alpha = \nu_k(z)$ d'ordine r_k dovremo *sostituire* nella y e nelle sue $r_k - 1$ *successive derivate* la $\nu_k(z)$, *moltiplicare* poi queste espressioni per certe funzioni di z, che, a meno di fattori costanti, coincidono coi numeratori delle frazioni elementari dello sviluppo (7), e poi far la somma. Se in particolare il denominatore $Q(z, \alpha)$ è $(\alpha - z)^n$, l'espressione (8) ci dà una *forma differenziale lineare* d'ordine $n - 1$ nella y.

4. Riepilogando e ricordando la definizione (2) dell'indicatrice possiamo dunque dire anche che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un'operazione distributiva* F_t *sia esprimibile con un numero finito di operazioni elementari è che, applicata alla particolare funzione* $y(t) = \frac{1}{t - \alpha}$, *dia per risultato una funzione* $v(z, \alpha)$ *razionale rispetto al parametro* α, *e annullantesi per* $\alpha = \infty$.