Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.4, p. 181–188.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_181_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

RECENSIONI

FRÉCHET et HALBWACHS. — *Le Calcul des Probabilités à la portée de tous*, in-8 piccolo, pagg. XI-297, Paris, Dunod, 1924.

Un distinto matematico ed un valente sociologo e statistico, persuasi dell'importanza ognora maggiore che il Calcolo della probabilità va acquistando nei più vari rami dello scibile, dalle scienze speculative alle applicate, dall'astronomia alla fisico-chimica, dalla biologia alle scienze sociali, hanno voluto scrivere un'opera che fosse accessibile ad un pubblico colto, anche se non specialmente fornito di cognizioni matematiche e al quale non sarebbe consentita la lettura dei più importanti trattati speciali, quali quelli di LAPLACE, di BERTRAND, di POINCARÉ, di CASTELNUOVO; e, mentre al medico, al demografo, all'economista, all'agente di assicurazioni non è lecito ignorare i principî di una dottrina che sola permetterà loro di usare con giusto criterio dei dati statistici che si presentano alle loro osservazioni, non si può d'altra parte esigere in loro quelle cognizioni superiori di matematica indispensabili per l'intelligenza delle opere ora ricordate.

Gli Autori della presente opera, adottando per lo svolgimento dell'opera stessa un disegno che si discosta in gran parte da quello seguito nei trattati classici, ricorrono a nozioni matematiche che non superano quelle elementari cognizioni che fanno parte dovunque di modesti programmi delle scuole medie; essi dimostrano che, anche senza fare uso di mezzi più elevati, si può penetrare profondamente nella teoria e porre e risolvere problemi di non lieve difficoltà. Si deve però riconoscere che, in più di un punto, la lettura dell'opera non è delle più facili, ed il lettore poco assuefatto al ragionamento matematico dovrà meditare a lungo su alcune di queste pagine, come quelle dedicate alla probabilità delle cause, o alle probabilità continue, o alle medie, o ai vari casi di applicazione della legge dei grandi numeri.

Una innovazione su cui è d'uopo richiamare l'attenzione sta nella definizione di probabilità che gli Autori hanno creduto di adottare. Volendo liberarla da ogni preconcetto speculativo, da quelle convenzioni od ipotesi tacitamente ammesse quando essa si definisce come rapporto fra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, essi ricorrono ad una veduta che si potrebbe dire sperimentale, a quella della *frequenza*. Dato un gruppo finito di prove, misurano la frequenza di un dato avvenimento mediante il rapporto fra il numero di prove in cui l'avvenimento si è prodotto ed il numero totale delle prove. Assumendo poi « come legge sperimentale del caso », che le variazioni fra le frequenze siano tanto più lievi quanto più i gruppi di prove sono numerosi, e quindi che le frequenze stesse tendono ad un limite quando il numero delle prove cresce indefinitamente, è codesto limite che viene assunto come *probabilità* dell'avvenimento.

Non è qui il luogo di discutere a fondo questa veduta, nè di indagare se essa si presterebbe a dare la base di una trattazione teorica: certo è che essa permette di affrontare e di risolvere buon numero di questioni d'interesse speculativo, ma più ancora di ordine pratico. Citiamo in particolare il Cap. V, destinato allo studio delle medie, delle mediane e dei valori tipici, ed in cui sono date indicazioni di calcolazione utili specialmente ai statistici. L'indice dei Capitoli, che qui riproduciamo, può giovare a dare un'idea del contenuto dell'opera.

Aggiungiamo che ogni Capitolo è corredato, oltre che da esempî svolti nel testo, da esercizi, alcuni dei quali tutt'altro che facili, i quali vengono proposti al lettore. *s. p.*

I. J. SCHWATT: *An introduction to the operations with series* (Philadelphia, The Press of the University of Pennsylvania, 1924; p. X-287, 8° gr.).

Le ricerche che formano l'oggetto di quest'opera sono nate, come racconta l'Autore, dal suo desiderio di trovare espressioni semplici e indipendenti dai numeri di BERNOULLI per le somme delle potenze simili dei numeri interi. Riassumerne il contenuto non è facile, poichè essa, più che un trattato, può dirsi una raccolta di formule; le sole contrassegnate con un numero ammontano a quasi 2500!

Passeremo in rapida rassegna gli argomenti dei vari Capitoli.

Nel Cap. 1 si stabilisce l'espressione e lo sviluppo in serie di potenze delle derivate d'ordine qualunque, prima per tipi particolari di funzioni (potenze ad esponente qualunque di un polinomio, funzioni ciclometriche e loro potenze, ecc.), poi per una funzione qualunque, e se ne fanno numerose applicazioni. Il Cap. 2 studia le derivate delle funzioni trigonometriche. Nel Cap. 3 si calcola la somma di serie finite ed infinite di coefficienti binomiali. Nel Cap. 4 si determinano le derivate d'ordine qualunque delle funzioni $\operatorname{sen}^p x$, $\cos^p x$, $x^p \operatorname{cosec}^p x$, $\operatorname{sen}^p x \cos^q x$, ecc., dove p, q sono interi positivi. Nel Cap. 5 si introduce l'operazione $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^n$, e se ne fanno varie applicazioni; tra le altre si trovano le somme (a termini tutti positivi o a segni alternati) delle potenze simili dei numeri naturali. Il Cap. 6 tratta delle derivate d'ordine qualunque di prodotti della forma $\prod\limits_k(1-x^k)$, $\Pi \operatorname{sen} kx$, ecc., e di altre funzioni non considerate prima. Nel Cap. 7 si sviluppa in serie una potenza ad esponente qualsiasi d'un polinomio o di una serie, e si applica il metodo alle funzioni ciclometriche. Il Cap. 8 contiene vari metodi per lo spezzamento di una funzione razionale fratta in frazioni semplici. Nel Cap. 9 si calcolano i noti integrali $\displaystyle\int\frac{x^m dx}{x^n \pm 1}$, dove m ed n sono razionali, e si riducono ad integrali di questa forma le somme di certe serie. Nel Cap. 10 il calcolo della somma di serie finite o infinite della forma $\sum\limits_n \varphi(n)x^n$, dove $\varphi(n)$ è funzione razionale, si riduce all'integrazione di equazioni differenziali lineari. La scomposizione in frazioni semplici viene applicata nel Cap. 11 a funzioni come $\dfrac{\cos^p x}{\cos nx}$, $\operatorname{tang}^p x$, e simili. Il calcolo della somma d'una serie trigonometrica forma oggetto del Cap. 12, dove si ricorre di nuovo all'operazione $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^n$. Nel Cap. 13 si calcolano vari integrali definiti, partendo talvolta dalla definizione diretta di integrale come limite di somma. Nel Cap. 14 si determina la somma di certe serie semiconvergenti, dando ai termini successivamente disposizioni diverse. Il Cap. 15 tratta dei numeri di BERNOULLI ed EULERO. Infine una breve Appendice contiene alcuni complementi al primo Capitolo.

L'Autore dice di ritenere che molta parte della sua opera sia nuova. Fino a qual punto tale asserzione sia esatta, non potrebbe decidersi senza un esame minuto del libro e un faticoso confronto colla letteratura anteriore, e specialmente cogli scritti dei vecchi analisti. Ma è certo p. es. che gli integrali del Cap. 13 sono ben noti; essi anzi si calcolano molto più rapidamente coll'integrazione per parti. Un'osservazione che ci ha recato sorpresa è questa: l'Autore dichiara di aver faticato molto, e inutilmente, per esprimere mediante funzioni elementari la somma:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}.$$

Ora, a meno di una costante additiva:

$$S = \int \frac{e^x - 1}{x} dx = \int \frac{e^x}{x} dx - \log x,$$

e $\int \frac{e^x dx}{x}$ colla sostituzione $x = \lg t$ diviene $\int \frac{dt}{\lg t}$, che è l'*iperlogaritmo*, funzione notoriamente non esprimibile con funzioni elementari. Al consiglio che l'Autore rivolge ai matematici, di occuparsi di questa e simili questioni, vorremmo aggiungere quello di accertarsi prima, in quanto sia possibile, di non avere a fare con problemi insolubili.

Il libro si presenta in bella edizione e in veste tipografica elegante. La mancanza di un'errata-corrige lascia sperare che si sia avuta la massima cura per evitare gli errori di stampa, ciò che sarebbe essenziale per un'opera di questa natura. A dir vero, nella nostra rapida scorsa qualcuno ne abbiamo incontrato (due a p. 13, uno a p. 246), mentre di varie formule abbiamo riscontrata l'esattezza; sicchè riteniamo che l'opera del prof. SCHWATT, frutto di lunghi e laboriosi studi, possa essere consultata con fiducia, e valga a rendere utili servigi ai cultori dell'Analisi.

G. VIVANTI

HENRI MARAIS: *Introduction géométrique à l'étude de la relativité.* Paris, Gauthier-Villars, 1923, pag. 191.

Con la limitata precisione dei nostri strumenti di misura, abbiamo l'illusione che i fenomeni fisici si svolgano in uno spazio a tre dimensioni, pel quale valgono i postulati della geometria di EUCLIDE. Questa è la base geometrica della fisica teorica ed in particolare della meccanica creata da GALILEO e da NEWTON.

Nel libro in esame il sig. MARAIS, volendo trattare una introduzione geometrica alla fisica, si preoccupa in modo particolare, di studiare le caratteristiche delle geometrie che a questa scienza interessano. A questo scopo, dopo un capitolo preparatorio trattante della teoria degli indici e delle forme algebriche, il sig. MARAIS osserva che, per le proprietà del parallelepipedo della geometria classica, si ottiene, come espressione del quadrato della lunghezza di un segmento, una forma bilineare (forma metrica) delle differenze delle coordinate lineari (coordinate di dimensioni nulle) degli estremi, i cui coefficienti $g_{ki}(i, k = 1, 2, 3)$ sono costanti e soddisfano a certe condizioni. Analizza minuziosamente le caratteristiche dello spazio che conducono a questa conclusione.

Sono ben note le ragioni fisiche che indussero EINSTEIN ad abbandonare alcuni postulati della meccanica classica ed a introdurre un più generale principio di relatività, in base al quale Egli fu condotto ad incorporare il concetto di tempo con quello di spazio, che prima erano considerati concetti indipendenti, ed a considerare l'universo fisico come uno spazio euclideo a « quattro dimensioni » a « forma metrica indefinita ».

Per passare a spazi di questa natura il MARAIS si basa dapprima sul concetto ordinario di vettore, col quale ritrova il concetto di coordinate lineari e l'espressione della lunghezza di un segmento anche in uno spazio euclideo ad n dimensioni, ossia determina l'espressione della « forma metrica ».

Così, con metodo diretto, trova che i coefficienti della forma metrica sono costanti, determinate dalla scelta del sistema di vettori fondamentali « paralleli » agli « assi » del sistema di coordinate lineari. Per rendere questi coefficienti invece indipendenti, al fine di poter generalizzare il concetto di forma metrica, il sig. MARAIS tratta delle corrispondenze fra « punti » e n^{ple} di numeri, valori di n variabili indipendenti.

In tal modo ottiene certi spazi fra i quali si può definire *euclideo* a n dimensioni quello in cui due punti determinano una distanza che può essere misurata da un numero e per il quale esiste un sistema di coordinate lineari, rispetto a cui il quadrato del numero che misura la distanza di due punti qualsiasi, sia una forma quadratica irriducibile a coefficienti costanti delle differenze delle coordinate di questi punti. Questa definizione riguardante le proprietà metriche dello spazio è infatti sufficiente per far ritrovare tutte le proprietà grafiche, e quindi può sostituire gli assiomi ed i postulati che ne formavano la base, col vantaggio di lasciare arbitrarie le immagini dell'angolo retto e della linea retta.

Con questa maniera di stabilire le proprietà dello spazio euclideo, dove la linea retta viene considerata come un dato intuitivo indipendentemente da nozioni cinematiche, il MARAIS si discosta dall'opera fondamentale del WEYL: *Spazio, tempo, materia*, che fu l'inspiratrice del suo libro.

Nel campo fisico, con la relatività ristretta, ci sono sistemi di coordinate privilegiati rispetto alle leggi della natura, detti sistemi galileiani, in quanto v'è distinzione assoluta rispetto a quelle leggi, fra i movimenti rettilinei uniformi ed i movimenti accelerati.

Per togliere questa disparità, in modo da stabilire le leggi della natura con relazioni fra grandezze, invarianti rispetto ad ogni sistema di coordinate, EINSTEIN ha ideato la teoria della relatività generale, per la quale lo spazio-tempo a quattro dimensioni, deve essere considerato in un senso più generale di quello euclideo, precisamente uno spazio di RIEMANN.

Ma per passare allo studio di questo genere di spazi e per poter scrivere le equazioni della fisica in modo che siano indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate, è necessario l'uso del calcolo differenziale assoluto, di cui il sig. MARAIS, sviluppa alcuni capitoli necessari per le applicazioni in vista, fisiche e geometriche.

Per introdurre il lettore nel concetto di spazio di RIEMANN, parte dall'esame delle multiplicità non lineari contenute nello spazio euclideo ad n dimensioni, rispetto alle quali la forma metrica ha, per ciò che riguarda i coefficienti g_{ik}, determinate caratteristiche. Da ciò prende lo spunto per studiare le multiplicità continue, che permettono di produrre spazi di RIEMANN, sottoponendo le proprietà metriche a particolari convenzioni in corrispondenza a quelle sussistenti nello spazio euclideo: 1°) due punti infinitamente vicini determinano una distanza ed una sola; 2°) il quadrato di un elemento lineare in un punto è una forma irriducibile delle sue componenti: i coefficienti g_{ik} sono date funzioni delle coordinate il cui determinante conserva segno costante nella multiplicità; 3°) possibilità di confrontare le distanze di due punti infinitamente vicini in diverse e qualsiasi regioni dello spazio, chiamando uguali le distanze misurate da numeri uguali.

Lo spazio di RIEMANN acquista la proprietà che l'unità di lunghezza si sposta senza alterarsi e diviene euclideo, allorchè esiste un sistema di coordinate lineari rispetto al quale le g_{ik} sono costanti.

Nello spazio euclideo, spostando un vettore parallelamente a sè stesso da un punto A ad un punto B si ottiene sempre lo stesso vettore qualunque sia il cammino percorso; ciò non avviene in generale in uno spazio di RIEMANN, dove lo spostamento parallelo conserva soltanto la lunghezza, ma non la direzione. Su questo fatto si basa il criterio per caratterizzare nell'intorno di un punto A lo scostamento dalla euclidicità e nasce l'opportunità di studiare una nuova grandezza geometrica, caratteristica dello spazio, chiamata tensore-curvatura. Quando il tensore-curvatura è nullo lo spazio è euclideo e la relazione che si ottiene uguagliando a zero il tensore-curvatura, che in sostanza è un'equazione differenziale del 2° ordine rispetto alle g_{ik}, dà la condizione necessaria e sufficiente a cui queste funzioni debbono soddisfare affinchè lo spazio sia euclideo. Opportunamente è applicato il calcolo assoluto per ottenere spazi a curvatura costante, i quali a seconda che essa è positiva o negativa sono chiamati spazi sferici o ipersferici.

Con la teoria della relatività generale vengono abolite dalla categoria delle forze propriamente dette, le forze di gravità che a noi sono invece famigliari come azioni esercitantesi a distanza. Gli effetti che noi osserviamo e che attribuiamo a dette forze, sono invece interpretati come manifestazioni di proprietà intrinseche dello spazio-tempo in cui le masse hanno la loro esistenza.

Non rimangono a considerarsi nella fisica come forze, cioè come cause capaci di deviare i punti materiali dalle traiettorie che seguirebbero naturalmente (geodetiche dello spazio), che le forze di origine elettromagnetica.

Il WEYL ha studiato certi spazi per i quali non vale l'assioma di potere confrontare fra loro distanze in due regioni qualsiasi, ciò che fisicamente equivale a dire che l'unità di lunghezza si altera spostandosi, mentre, poichè ammette in ogni punto valida la metrica di uno spazio di RIEMANN, non si altera cambiando soltanto direzione.

Le proprietà metriche degli spazi di WEYL permettono di estendere la teoria di EINSTEIN anche ai campi elettromagnetici; perciò anche questi possono essere interpretati come manifestazioni di proprietà dello spazio fisico. Così, a parte speciali problemi, l'intera fisica si compendierebbe in una geometria dell'universo.

In base a queste vedute, il MARAIS introduce il lettore nello studio della metrica degli spazi di WEYL sviluppandola succintamente.

Il MARAIS, anzichè trattare gli spazi da un punto di vista generale, pone dunque particolare diligenza alle successive estensioni del concetto di spazio, partendo da quello classico, a tutti familiare ed usato praticamente, analizzando i caratteri di quelli che trovano applicazioni nella fisica-relativistica. Le astrazioni geometriche sono con squisita opportunità giustificate da nozioni sulla teoria della relatività e lo strumento analitico, di pertinenza del calcolo assoluto, è introdotto poco prima dell' uso.

Questo libro riuscirà certamente utile a coloro che intendono dedicarsi allo studio di opere tecniche sulla Relatività, come ad esempio quella del WEYL, del LAUE, del BECQUEREL, del MARCOLONGO, dell' EDDINGTON ed altre.

M. MANARINI