Antonio Signorini

Una conseguenza della diseguagìianza di Schwarz

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.5, p. 199–200.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_199_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1925.

Una conseguenza della diseguaglianza di Schwarz.

Nota di ANTONIO SIGNORINI

Siano φ_1, φ_2, p_1, p_2 funzioni generalmente continue del punto generico di un campo τ ad un numero qualunque di dimensioni: colla condizione aggiuntiva che in tutto τ sia

$$p_2 \geqq p_1 > 0$$

senza che la p_2 si identifichi colla p_1.

[1] Da ciò si ricava senza calcoli l'altro teorema del BLASCHKE secondo il quale le estremali di $\int F ds$ (ove F è una funzione del punto e ds l'arco) sopra una superficie costituiscono un sistema ciclico; perchè alle geodetiche di una superficie per cui l'elemento d'arco sia $= F ds$ corrisponde appunto un sistema ciclico sulla superficie di partenza.

Adottando le notazioni

$$a_r = \int_\tau p_r \varphi_1^2 d\tau, \quad b_r = \int_\tau p_r \varphi_2^2 d\tau, \quad c_r = \int_\tau p_r \varphi_1 \varphi_2 d\tau \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

la diseguaglianza di SCHWARZ dà

$$a_1 b_1 - c_1^2 > 0, \quad a_2 b_2 - c_2^2 > 0$$

tutte le volte che φ_1, φ_2 non siano linearmente dipendenti in τ, nel qual caso $a_1 b_1 - c_1^2 = 0$, $a_2 b_2 - c_2^2 = 0$.

Facilmente si dimostra che, escluso questo caso, necessariamente

$$(1) \qquad a_2 b_2 - c_2^2 > a_1 b_1 - c_1^2.$$

Infatti, poniamo

$$p_3 = p_2 - p_1$$

e corrispondentemente sostituiamo (1) con

$$(2) \qquad a_3 b_3 - c_3^2 + a_1 b_3 + a_3 b_1 - 2c_1 c_3 > 0.$$

Risultando dalla diseguaglianza di SCHWARZ

$$a_3 b_3 - c_3^2 > 0, \quad a_1 > \frac{c_1^2}{b_1}, \quad a_3 > \frac{c_3^2}{b_3},$$

la (2) rimane dimostrata non appena si rilevi che

$$c_1^2 \frac{b_3}{b_1} + c_3^2 \frac{b_1}{b_3} - 2c_1 c_3 = \left(c_1 \sqrt{\frac{b_3}{b_1}} - c_3 \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} \right)^2.$$