
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARCELLO LELLI

Sui teoremi delle quantità di moto per i sistemi continui

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 4 (1925), n.5, p. 204–206.

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_204_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_204_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui teoremi delle quantità di moto per i sistemi continui.

Nota di MARCELLO LELLI

1. Nel n.° 2, corrente anno, di questo « Bollettino » ho avuto l'occasione di scrivere i teoremi delle quantità di moto nella forma che più torna vantaggiosa nella dinamica dei fluidi.

Aggiungo ora un appunto giustificativo di quelle espressioni che possono non parere così immediate come io ho supposto.

Si consideri in un certo istante t , tracciata in seno a un fluido viscoso in movimento, una superficie chiusa σ .

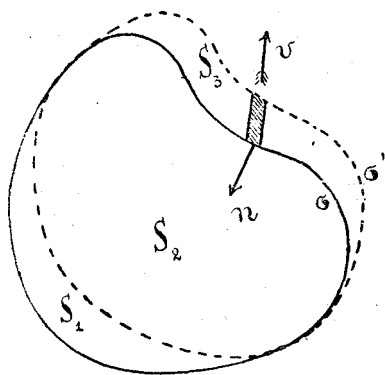
Dopo un elemento, infinitesimo, dt di tempo, le particelle fluide che occupavano (supponiamo interamente) lo spazio S racchiuso entro σ , occuperanno lo spazio S' limitato dalla superficie σ' .

Siano: S_2 la parte di S' che è comune ad S , S_1 ed S_3 quelle che bisogna aggiungere ad S_2 per avere rispettivamente S ed S' .

Indicando con ϱ la densità, $\mathbf{F}$ la forza unitaria di massa, p l'omografia delle pressioni, $\mathbf{v}$ la velocità, $\mathbf{n}$ la normale interna a σ , il primo teorema delle quantità di moto (ciò che qui si dice per esso può naturalmente ripetersi per il secondo), applicato alla massa racchiusa entro σ ed espresso in forma differenziale, dà luogo alla relazione

$$1. \quad \left(\int_S \varrho \mathbf{F} dS + \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma \right) dt = \int_{S_2} \varrho (\frac{d\mathbf{v}}{dt}) dt dS + \int_{S_3} \varrho \mathbf{v} dS - \int_{S_1} \varrho \mathbf{v} dS.$$

Infatti il computo della variazione della quantità di moto



avvenuta dopo il tempo dt , può suppersi eseguito, facendo prima la differenza fra quella posseduta al tempo $t + dt$ dagli elementi che in quell'istante occupano lo spazio S_2 e la quantità di moto degli elementi (diversi dai primi) che si trovavano negli stessi punti al tempo t ; infine aggiungendo la quantità di moto di S_3 e togliendo quella di S_1 .

Ma gli elementi dS degli spazi S_1 , S_2 possono intendersi rappresentati da cilindretti appog-

giantisi al contorno degli elementi $d\tau$ della superficie σ , aventi le generatrici parallele a $\mathbf{v}$ e la lunghezza $\mathbf{v}dt$.

Pertanto potrà scriversi

$$dS = \mathbf{v}dt \times \mathbf{n}d\tau,$$

il primo segno convenendo agli elementi di S_1 , il secondo a quelli di S_2 .

Avremo dunque:

$$(2) \quad \int_S \rho \mathbf{F} dS + \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} d\tau = \int_{S_2} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dS - \int_{\sigma} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\tau,$$

espressione che differisce dalla (1) della mia precedente Nota solamente nei riguardi del campo S_2 che qui compare al posto del campo S . Ma evidentemente deve ritenersi S_2 coincidente con S , poichè l'elemento dt è un infinitesimo.

2. Una dimostrazione diretta dello stesso teorema può darsi partendo dall'equazione del moto

$$\text{grad } \beta = \rho(\mathbf{F} - \mathbf{a}) \quad (\mathbf{a} \text{ accelerazione})$$

avendo presente la relazione

$$\rho \mathbf{a} = \frac{d(\rho \mathbf{v})}{dP} \mathbf{v} + \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{v} \frac{d\rho}{dt}.$$

Infatti, integrando, si ottiene

$$(3) \quad \int_S \rho \mathbf{F} dS + \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} d\tau = \int_S \frac{d(\rho \mathbf{v})}{dP} \mathbf{v} dS + \int_S \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dS - \int_S \mathbf{v} \frac{d\rho}{dt} dS.$$

Ma si ha (cfr. BURALI-FORTI e MARCOLONGO: *Transformations linéaires*, Chap. III):

$$\int_S \frac{d(\rho \mathbf{v})}{dP} \mathbf{v} dS = - \int_{\sigma} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\tau - \int_S \rho \mathbf{v} \text{div } \mathbf{v} dS.$$

Perciò, sostituendo e ricordando che, per la continuità, deve essere

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

si ritrova la relazione (2).

3. Si è supposto al n.º 1 che, durante il moto, il fluido occupi sempre interamente lo spazio S racchiuso dalla superficie fissa σ , la quale ipotesi risponde certo al reale comportamento di un fluido gassoso.

Durante il moto di un liquido, invece, questa condizione può cessare di essere verificata.

Sia σ_1 l'insieme delle superficie chiuse che limitano le cavità formatesi entro la massa fluida, e lo spazio racchiuso entro di esse. Poichè in ciascuna cavità regna una pressione che con buona approssimazione può ritenersi uniforme (pressione del vapore saturo a quella temperatura) e poichè gli elementi $d\tau_1$ sono principali, risulta

$$\int_{\sigma_1} p \mathbf{n} d\tau_1 = 0$$

e quindi la (2) assume la forma

$$4. \quad \int_{S-s} \rho \mathbf{F} dS + \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\tau = \int_{S-s} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dS - \int_{\sigma + \sigma_1} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\tau.$$

Questa espressione è atta, fra l'altro, a indicare la modificazione che subirebbe la pressione risentita dalla girante di una macchina centrifuga, quando, per una non proporzionata apertura delle luci di egresso in confronto con quelle di ingresso, venisse a mancare la continuità della massa liquida.

Bologna, ottobre 1925.