Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Mario Pascal

La teoria piana delle superficie portanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.5, p. 216–229.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_216_0¿

RELAZIONI SCIENTIFICHE

La teoria piana delle superficie portanti.

Il problema piano delle superficie portanti si è avviato ormai da tempo ad una completa risoluzione [1], e, almeno entro certi limiti, i risultati teorici raggiunti si sono trovati in sufficiente accordo con quelli sperimentali; talchè la teoria che si fonda sul teorema di KUTTA-JOUKOWSKI, e da questo con semplicità di mezzi trae modo di studiare il comportamento di svariatissime forme di profili alari, costituisce senza alcun dubbio uno dei più interessanti capitoli classici della Fisica-Matematica.

Non sarà quindi fuor di luogo esporne sinteticamente le idee fondamentali e dire dei metodi usati e dei risultati raggiunti.

***

Se si osserva una rappresentazione, ricavata da prove sperimentali, dell'andamento dei filetti fluidi di una corrente piana parallela nell'intorno di un profilo piano, si rileva subito la presenza di una compressione dei filetti fluidi nella parte superiore e di una corrispondente depressione nella parte inferiore dell'ostacolo, ed inoltre una striscia vorticosa che si estende a poppavia.

[1] La prima soluzione è di W. M. KUTTA, *Auftriebkräfte in strömenden Flussigkeiten.* Ill. Aëron Mitt., Strassburg, 1902, il quale però allora non giunse ad una valutazione quantitativa delle forze agenti. Questa fu ottenuta più tardi dal KUTTA stesso (cfr. *Ueber eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung.* Sitz. K. Bayer. Ak., 1910; *Ueber ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen.* Sitz. K. Bayer. Ak., 1911), ed indipendentemente da lui da N. JOUKOWSKI (cfr. *Aérodynamique* (trad. par DRZEWIECKI), Paris, Gauthier-Villars, 1916).

La teoria delle superficie portanti piane (da considerarsi cioè come sezioni di cilindri infinitamente lunghi) prescinde in primo luogo dalla fascia vorticosa poppiera, ed interpreta la compressione e la depressione dei filetti fluidi al disopra ed al disotto dell'ostacolo, come un fatto dovuto alla costituzione intima della corrente investitrice, la quale deve essere considerata come la sovrapposizione di più correnti delle quali una almeno deve dar luogo ad una circuitazione diversa da zero [2], ed un'altra deve essere in regime uniforme all'infinito.

È noto che ogni funzione di variabile complessa può considerarsi come rappresentativa di una corrente piana parallela in un fluido incompressibile. Se noi assumiamo come ostacolo una circonferenza che per semplicità potremo supporre di raggio unitario e col centro nell'origine, i tipi di correnti bidimensionali che hanno il cerchio dato come particolare linea di flusso sono di due specie semplicissime

$$W_1 = c_1\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \tag{1}$$

che è una corrente che all'infinito scorre con velocità costante parallelamente all'asse reale nel verso positivo o negativo a seconda del segno della costante c_1; e

$$W_2 = ic \log \zeta \tag{2}$$

che è la corrente a potenziale provocata da un vortice nel punto $\zeta = 0$, cioè nell'interno del cerchio ostacolo. Definendo la circuitazione delle velocità come $\int V d\zeta$, l'integrale essendo esteso ad un contorno che circonda una volta l'ostacolo (in particolare la circonferenza stessa), è chiaro che soltanto W_2 darà luogo ad una circuitazione diversa da zero.

La classificazione di queste correnti investitrici si fa introducendo la funzione della velocità

$$\frac{dW}{d\zeta} = w = u - iv,$$

e notando che se tutte le singolarità di tale funzione sono — come in generale accade — racchiuse nel contorno dell'ostacolo, nel-

(2) L'intimo legame fra circuitazione delle velocità e forza agente sull'ostacolo è stato intuito per la prima volta (per dichiarazione dell'A. fin dal 1894) da LANCHESTER, *Aerial flight*, v. I (*Aerodynamics*), Constable, London, 1907 (trad. francese di C. BENOIT, Paris, Gauthier-Villars, 1914; trad. tedesca di C. e A. RUNGE, Leipzig, Teubner, 1909).

l'area esterna a tale contorno si può assicurare l'esistenza di uno sviluppo secondo le potenze negative di ζ

$$\frac{dW}{d\zeta} = w = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \ldots.$$

ove le α_i sono coefficienti in generale complessi. Si vede subito allora che le correnti del tipo (1) sono tali per cui

$$\alpha_0 \neq 0, \quad \alpha_1 = 0,$$

mentre per le correnti del tipo (2) è

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0;$$

chiameremo le prime *correnti traslatorie* e le seconde *correnti circolatorie.*

La più generale corrente intorno ad un ostacolo circolare si ha sovrapponendo una corrente traslatoria con velocità all'infinito parallela all'asse x, una traslatoria con velocità all'infinito parallela all'asse y, ed una corrente circolatoria. Si ha allora una corrente di tipo nuovo, per la quale è

$$\alpha_0 \neq 0, \quad \alpha_1 \neq 0,$$

che chiameremo corrente *circuito-traslatoria* (o corrente di KUTTA o peripteroide [3]). Anche questa corrente dà luogo ad una circuitazione intorno all'ostacolo diversa da zero, ed inoltre è in regime uniforme all'infinito.

Il fatto notevole che ora si presenta e che è il perno principale sul quale si basa la teoria, è che l'andamento delle linee di flusso nell'intorno dell'ostacolo riproduce con buona approssimazione l'andamento dei filetti fluidi osservato sperimentalmente; il che naturalmente offre sufficiente giustificazione dell'impiego che si fa di una tale corrente per la traduzione analititica del fenomeno fisico [4].

La corrente adoperata dal KUTTA e dal JOUKOWSKI è del tipo

$$W = c_1\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - ic_2\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - ic \log \zeta \tag{3}$$

[3] LANCHESTER, loc. cit.

[4] È di non dubbio interesse il notare che le correnti circolatorie intorno a profili possono esser considerate come equivalenti a correnti provocate da una fascia di vertici convenientemente disposti lungo il contorno del profilo stesso. Cfr. W. MÜLLER, *Wirbelschichten und Zirkulation.* Zeitschr. f. techn. Physik, Jah. 5, 1924.

che, se il cerchio ostacolo è di raggio R ed ha il centro nel punto $\zeta = \zeta_0$, può anche scriversi

$$W = V_\infty(\zeta - \zeta_0) + \frac{\bar{V}_\infty R^2}{\zeta - \zeta_0} - ic \log (\zeta - \zeta_0) \tag{4}$$

avendo notato che la velocità limite è

$$V_\infty = u_\infty - iv_\infty = \frac{1}{R}(c_1 - ic_2).$$

La compressione e la depressione delle linee di flusso al disopra ed al disotto dell'ostacolo indicano l'esistenza di una forza che il fluido in moto esercita sul contorno: è precisamente la forza sostentatrice quantitativamente valutata col teorema di KUTTA-JOUKOWSKI: Data una corrente circuito traslatoria la risultante delle pressioni che il fluido esercita sull'ostacolo è data dal prodotto della densità del fluido per la circuitazione (calcolata lungo il contorno dell'ostacolo) e per la velocità limite della corrente. La direzione di tale forza si ottiene rotando di un angolo retto il vettore della velocità limite nel verso contrario a quello secondo il quale è stata calcolata la circuitazione ([5]).

Questo teorema vale per qualsiasi forma di ostacolo purchè immerso in un fluido irrotazionale e privo di attrito. È appunto di questa generalità che si approfitta per studiare forme svariatissime di profili che si posson tutte considerare come ottenute dal cerchio mediante una rappresentazione conforme del piano dell'ostacolo e viceversa.

È noto infatti che si può trovare caso per caso una funzione $z(\zeta)$ regolare in tutta l'area esterna al profilo che stabilisca una corrispondenza biunivoca e senza eccezioni fra l'area esterna al profilo dato e l'area esterna ad un cerchio (unitario o no) sul piano ζ, contorni compresi. La funzione è completamente determinata se si fanno corrispondere fra loro due punti prefissati

([5]) Il teorema può facilmente dimostrarsi anche quando l'ostacolo è in presenza di una parete rettilinea rigida indefinita (cfr. per es. H. BLASIUS, *Strömfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung*. Zeitscht. f. Math. u. Phys., Bd. 59, 1910). È stato osservato però (U. CISOTTI, *Effetto dinamico di una corrente che fluisce fra un cilindro e una parete indefinita*. Rend. R. Acc. Lincei, (6), v. I, 1925) che la presenza della parete rigida sostituisce la condizione dell'esistenza di un regime uniforme della corrente all'infinito, di guisa che, perchè sia diversa da zero la forza agente sull'ostacolo, basta in tal caso l'impiego di una pura corrente circolatoria.

del contorno e i punti all'infinito dei due piani mediante la condizione

$$z = \lambda\zeta \qquad \text{all'infinito}$$

λ essendo un parametro dipendente dalla scelta dei punti sui contorni che si fan corrispondere.

Trasformando allora inversamente la funzione $W(\zeta)$ rappresentativa della corrente intorno al cerchio, si trova una $W(z)$ che sarà la funzione di variabile complessa rappresentativa della più generale corrente circuito-traslatoria intorno al profilo dato sul piano z.

Il problema dunque della determinazione del moto intorno ad un dato profilo si riconduce ad un problema di rappresentazione conforme di un'area piana su un'altra.

L'espressione di $W(z)$ contiene tre costanti arbitrarie c_1, c_2, c: le due prime sono determinate, come già si è accennato, quando è dato il vettore rappresentativo della velocità limite della corrente.

La terza costante rappresenta, a meno di fattori, la circuitazione delle velocità intorno al cerchio, oppure, il che è lo stesso, intorno all'ostacolo che dal cerchio si è ottenuto per rappresentazione conforme. L'arbitrarietà della costante circuitazionale si utilizza per ottenere che in uno almeno dei punti angolosi del profilo dato vi sia velocità finita. È caratteristico infatti dei punti angolosi la circostanza che in essi la velocità della corrente può salire oltre ogni limite, il che porta naturalmente, in virtù del teorema di BERNOULLI, all'esistenza di una pressione negativa in quell'intorno: ciò che è fisicamente inaccettabile. Con una opportuna scelta della costante circuitazionale si può però render finita la velocità in uno solo dei punti angolosi e dare in conseguenza (se vi è un solo punto angoloso) un senso fisico alla corrente studiata.

Se il profilo dato presenta invece più punti angolosi, non è in generale possibile con la sola scelta di c eliminare tutte le velocità infinite che in ciascuno di quei punti compare. Si provvede allora con opportuni arrotondamenti degli spigoli vivi. Rappresentato cioè il profilo dato su una circonferenza, si può considerare un'altra circonferenza che circondi totalmente la prima toccandola nel punto che corrisponde ad uno dei punti angolosi. Da questa seconda circonferenza si può con le formule inverse di trasformazione risalire ad un contorno sul piano z che circonda totalmente il profilo primitivo, scostandosi da esso di tanto poco quanto si vuole, ma arrotondando tutti i punti angolosi escluso quello corrispondente al punto di tangenza.

Si possono in tal modo studiare gran numero di profili i quali si avvicinano notevolmente a quelli d'ordinario usati come sezioni di superficie alari (6).

Il problema può del resto porsi ancora in altri modi.

Si può per esempio, invece di fissare *a priori* la forma dell'ostacolo e cercare la relazione che lo trasformi in una circonferenza partire da una funzione costruita in modo arbitrario e cercare con essa sul piano z la curva trasformata della circonferenza (7).

Oppure invece di determinare la funzione rappresentativa della corrente investitrice di un assegnato ostacolo e quindi la funzione della velocità $w = u - iv$, costruire dapprima la funzione w dotata delle singolarità caratteristiche e da essa dedurre tanto la funzione rappresentativa della corrente, quanto la forma dell'ostacolo pensato come materializzazione di archi di linee di flusso. Questo metodo, che è quello seguito dal BLASIUS (8), ha fra l'altro anche il vantaggio di non dar luogo a punti in cui la velocità possa superare qualunque valore.

* * *

La forza sostentatrice individuata dal teorema di KUTTA-JOUKOWSKI è espressa mediante le eleganti formule di BLASIUS (9) da

$$P = P_y + iP_x = \frac{\rho}{2}\int_k w^2 dz \tag{5}$$

ed il suo momento rispetto all'origine da

$$M_0 = \frac{\rho}{2} p.\, r. \int_k w^2 z dz \tag{6}$$

(6) Cfr. MARIO PASCAL, *Le ricerche aerodinamiche di Kutta e di Joukowski.* Napoli, Pellerano, 1925; oppure Giorn. di Mat. di Battaglini. v. 62, 1924.

(7) V. per es. M. PASCAL, *Forze di pressione su un montante di aeroplano*, I-II, Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 29, 1920; Id., *Forza sostentatrice su un montante di aeroplano.* Rend. R. Acc. di Napoli, (3), v. 27, 1921.

(8) Cfr. H. BLASIUS, *Strömfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung.* Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 59, 1910; Id., *Strömfunktionen für die Strömung durch Turbinenschaufeln.* Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 60, 1911; M. PASCAL, *Corrente fluida bidimensionale intorno a due lamine consecutive.* Giorn. di Mat. di Battaglini, v. 62, 1924.

(9) H. BLASIUS, *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik.* Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 58, 1910.

gli integrali essendo estesi al contorno k dell'ostacolo nel verso antiorario.

Poichè poi, nell'ipotesi che il contorno k racchiuda tutte le singolarità della funzione w, si può scrivere

$$w = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots \tag{7}$$

si trova facilmente

$$P_y + i P_x = 2\pi\rho i \alpha_0 \alpha_1 \tag{8}$$

cioè, poichè come è facile vedere

$$\alpha_0 = u_\infty - i v_\infty = w_\infty, \quad \alpha_1 = \frac{C}{2\pi i} \tag{9}$$

essendo w_∞ la velocità all'infinito e C il valore della circuitazione delle velocità lungo l'ostacolo, si ha

$$P_y + i P_x = \rho C w_\infty . \tag{10}$$

Dicendo poi

$$M_0 + i N_0 = \frac{\rho}{2} \int_k w^2 z dz. \tag{11}$$

si trova

$$M_0 + i N_0 = \pi\rho i \{\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2\} \tag{12}$$

dove

$$2\pi i \alpha_2 = \int_k wz dz = m_x + i m_y \tag{13}$$

e quindi in definitiva

$$M_0 = \rho \{ m_x u_\infty + m_y v_\infty \} \tag{14}$$

la quale esprime l'elegante teorema enunciato da GRAMMEL [10]: Il momento della forza sostentatrice rispetto all'origine è, per unità di lunghezza dell'ostacolo, uguale al prodotto della densità del fluido per la somma dei prodotti delle componenti omonime della velocità limite e del momento statico della circuitazione.

Si può notar subito che i momenti statici m_x e m_y individuano un punto

$$x_0 = \frac{m_x}{C}, \quad y_0 = \frac{m_y}{C} \tag{15}$$

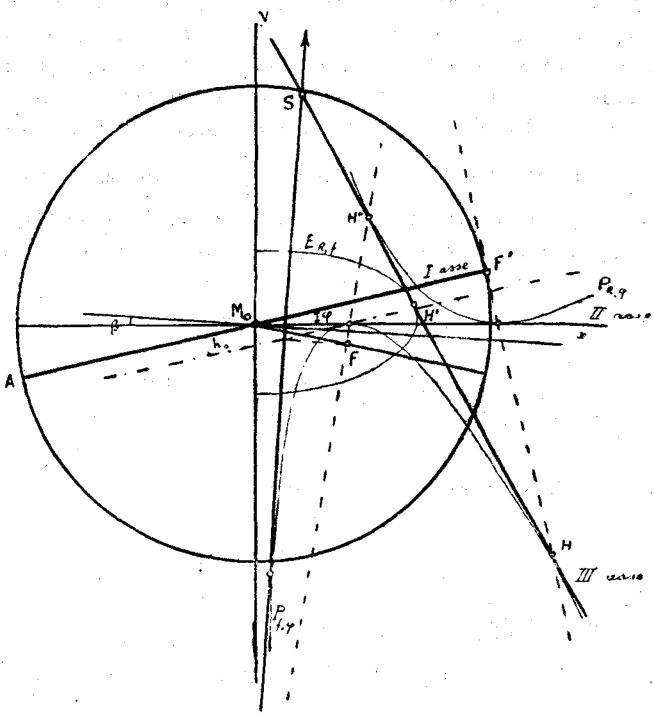
[10] R. GRAMMEL, *Ueber ebenen Zirkulationsströmungen und die von ihnen erzeugten Kräfte.* Jahr. Deuts. Math. Verein., Bd. 25, 1917; Id., *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges.* Vieweg, Braunschweig, 1917.

cioè

$$z_0 = \frac{\int wz\,dz}{\int w\,dz}$$

che è sulla linea d'azione della forza sostentatrice e che può dirsi il ***centro della circuitazione.***

Tale punto ha una grande importanza per le eleganti considerazioni geometrico-meccaniche del MISES [11] e del MÜLLER [12],



perchè è uno degli elementi che servono alla determinazione geometrica della forza sostentatrice.

Dato un profilo, che supponiamo con un solo punto angoloso,

(11) v. MISES, *Zur Theorie des Tragflächenauftriebs.* Zeitschr. f. Flugtech. u. Motorluftsch., 1917, 1920.

(12) W. MÜLLER, *Ueber ebene Profilströmung mit Zirkulation.* Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, 1923.

mediante una funzione che sarà in generale del tipo

$$\zeta = t_0 + n\left(z + \frac{t_1}{z} + \frac{t_2}{z^2} + \dots\right) \tag{16}$$

rappresentiamolo su un cerchio: consideriamo i due piani z e ζ sovrapposti e diciamo M il centro del cerchio (che per semplicità può essere l'origine ed allora è $t_0 = 0$) ed R il suo raggio.

La congiungente M col punto della circonferenza (v. figura) che corrisponde al punto angoloso, faccia con l'asse x l'angolo φ: diremo *M centro del profilo* [13] e tale retta *1° asse del profilo.* Supponiamo che t_1 sia della forma $t_1 = -d^2e^{2i\gamma}$ e consideriamo la retta che si ottiene facendo rotare l'asse x positivo nel verso antiorario di un angolo γ: tale retta sarà il 2° *asse del profilo*: per semplicità assumeremo $\gamma = 0$ cioè l'asse delle x coincidente col 2° asse. Conduciamo ora da M un segmento $MF = n\dfrac{d^2}{R} = f$ che faccia coll'asse x un angolo $-\varphi$: il punto F è detto *fuoco del profilo*, ed è un punto tale che il momento della forza sostentatrice rispetto ad esso risulta indipendente dall'angolo di attacco β.

Infatti nelle condizioni in cui ci siamo posti si ha

$$w = -V_\infty e^{i\beta} - \frac{ic}{z} + \frac{\frac{1}{n} V_\infty R^2 e^{-i\beta} - V_\infty d^2 e^{i\beta}}{z^2} + \dots \tag{17}$$

Il valore della forza sostentatrice è

$$P = 4\pi\rho \frac{R}{n} V_\infty^2 \operatorname{sen}(\varphi + \beta) \tag{18}$$

ed il momento rispetto all'origine

$$M_0 = 2\pi\rho V_\infty^2 d^2 \operatorname{sen} 2\beta. \tag{19}$$

Deducendo da questo il momento rispetto al punto F si ha

$$M_F = -2\pi\rho V_\infty^2 d^2 \operatorname{sen} 2\varphi; \tag{20}$$

(13) Tale punto ha avuto anche una elegante interpretazione meccanica come centro di gravità di una distribuzione di masse lungo il profilo con densità lineare $\left(\dfrac{d\zeta}{dz}\right)$. Cfr. PH. FRANK u. K. LÖWNER, *Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungsatzes auf ein Problem der Hydrodynamic.* Zeitschr. f. Math., Bd. 3, 1919.

il braccio è

$$h_F = \frac{M_F}{P} = -\frac{nd^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{2R \operatorname{sen}(\varphi + \beta)} = -\frac{h_0}{\operatorname{sen}(\varphi + \beta)}$$

avendo posto

$$h_0 = \frac{nd^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{2R} = \frac{f \operatorname{sen} 2\varphi}{2}.$$

Segue subito di qui il piede della perpendicolare condotta dal punto F alla linea d'azione della forza sostentatrice giace su una retta parallela al 1° asse alla distanza h_0 da questo e che divide per metà il segmento M_0F.

Tenendo conto del valore del momento rispetto all'origine è chiaro che l'equazione della linea d'azione della forza sostentatrice è

$$x \cos\beta - y \operatorname{sen}\beta = \frac{f \operatorname{sen} 2\beta}{2 \operatorname{sen}(\varphi + \beta)}. \tag{21}$$

Se eliminiamo β fra questa e la sua prima derivata si trova che le linee d'azione della forza sostentatrice inviluppano al variare di β la parabola

$$(x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi)^2 - 2f(x \cos\varphi - y \operatorname{sen}\varphi) + f^2 = 0 \tag{22}$$

che, come si può verificare, ha per fuoco F, per asse una retta perpendicolare al 1° asse, e per parametro $2h_0$: il 1° asse è dunque la direttrice di tale parabola che diremo $P_{f,\varphi}$, e la retta parallela al 1° asse alla distanza h_0 è la sua tangente al vertice.

Segue da tutto questo una semplicissima costruzione della linea d'azione della forza sostentatrice una volta fissati β, f, φ, $\frac{R}{n}$, cioè in sostanza una volta fissati β ed $\frac{R}{n}$ e determinati il 1° asse ed il fuoco del profilo. Basta infatti condurre da F la parallela alla direzione β e determinare il punto d'incontro di tale parallela con la parallela al 1° asse alla distanza h_0: la perpendicolare alla direzione β in tale punto sarà tangente alla parabola delle forze sostentatrici, cioè sarà la linea d'azione della forza corrispondente all'angolo di attacco β e a quel profilo che si è considerato.

Su tale linea d'azione dovrà trovarsi il centro della circuitazione. Ed infatti, tenendo presenti la (13) e la (17) si ha subito

$$(23)\qquad x_0 = \frac{\left(\frac{R}{n} + f\right)\operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}(\varphi+\beta)}, \quad y_0 = \frac{\left(\frac{R}{n} - f\right)\cos\beta}{2\operatorname{sen}(\varphi+\beta)}$$

valori che evidentemente soddisfano la (21).

Per mezzo del centro della circuitazione S è possibile trovare inoltre un segmento dalla misura del quale si può ricavare il valore della forza sostentatrice per ogni angolo β. Se infatti sulla linea d'azione della forza sostentatrice a partire dal punto S si riporta un segmento uguale al valore reciproco della forza, uguale cioè a

$$\frac{1}{K\frac{R}{n}\operatorname{sen}(\varphi+\beta)}$$

dove K indica l'insieme dei coefficienti che entrano nell'espressione di P, si ottiene un punto le cui coordinate sono

$$x = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\varphi+\beta)}\left[\frac{\frac{R}{n}+f}{2} + \frac{1}{K\frac{R}{n}}\right], \quad y = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\varphi+\beta)}\left[\frac{\frac{R}{n}-f}{2} + \frac{1}{K\frac{R}{n}}\right].$$

Eliminando β si vede che questi punti giacciono sulla retta di equazione

$$(24)\qquad x\cos\varphi\left[\frac{\frac{R}{n}-f}{2} + \frac{1}{K\frac{R}{n}}\right] + y\operatorname{sen}\varphi\left[\frac{\frac{R}{n}+f}{2} + \frac{1}{K\frac{R}{n}}\right] = \frac{\frac{R^2}{n^2}-f^2}{4} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2\frac{R^2}{n^2}}.$$

Disegnata che sia questa retta, se con la regola che abbiamo data si traccia la linea d'azione della forza sostentatrice, il valore reciproco della misura del segmento intercetto fra il punto S e l'intersezione con la retta (24) dà l'intensità della forza agente per l'angolo di attacco considerato.

Se si elimina l'angolo β fra le (23) si ha

$$(25)\qquad 2x_0\cos\varphi\left(\frac{R}{n} - f\right) + 2y_0\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{R}{n} + f\right) = \frac{R^2}{n^2} - f^2$$

cioè il centro della circuitazione si muove lungo una retta mentre la linea d'azione della forza sostentatrice inviluppa la parabola $P_{f,\varphi}$.

Tale retta si dirà *3° asse del profilo* e gode di interessanti proprietà.

Prima di tutto se diciamo F' il punto sul 1° asse alla distanza $\frac{R}{n}$ dall'origine (punto che, se $n=1$, diventa il secondo punto d'intersezione del 1° asse col cerchio fondamentale di raggio R), le coordinate

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{n}+f\right)\cos\varphi,\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{n}-f\right)\operatorname{sen}\varphi$$

del punto medio di FF' soddisfano l'equazione del 3° asse; e poichè l'equazione della retta FF' è

$$x\left(\frac{R}{n}+f\right)\operatorname{sen}\varphi+y\left(\frac{R}{n}-f\right)\cos\varphi-2\frac{R}{n}f\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=0$$

si ha che il 3° asse è perpendicolare nel punto medio al segmento FF'.

L'equazione (25) del 3° asse dipende dai tre parametri $\frac{R}{n}$, f, φ: se $\frac{R}{n}$ varia, mentre f, φ rimangono fissi, il 3° asse inviluppa la parabola $P_{f,\varphi}$ che si è già trovata come inviluppo delle linee d'azione delle forze sostentatrici al variare di β.

Se $\frac{R}{n}$ e f rimangono fissi e φ varia, il 3° asse inviluppa l'ellisse $E_{\frac{R}{n},f}$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\frac{R}{n}+f}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\frac{R}{n}-f}{2}\right)^2}=1. \tag{26}$$

Ed infine se $\frac{R}{n}$ e φ rimangono fissi e f varia il 3° asse inviluppa la parabola $P_{\frac{R}{n},\varphi}$

$$(x\cos\varphi-y\operatorname{sen}\varphi)^2-2\frac{R}{n}(x\cos\varphi+y\operatorname{sen}\varphi)+\frac{R^2}{n^2}=0. \tag{27}$$

Ad ogni profilo sono dunque collegate queste tre curve fondamentali che da un lato permettono lo studio approfondito di un profilo dato rispetto al modo di variare della forza sostentatrice con l'angolo di attacco, mentre dall'altro caratterizzano classi di profili equivalenti nei riguardi di una determinata forza sostentatrice, e ci dan modo di trovare la forma di siffatti profili.

È certamente molto interessante studiare il modo di comportarsi di queste tre curve: accenneremo soltanto a qualcuna delle proprietà che le caratterizzano.

Le parabole $P_{f,\,\varphi}$ e $P_{\frac{R}{n},\,\varphi}$ sono entrambe tangenti agli assi coordinati (2° asse come asse x): i punti di contatto della $P_{f,\,\varphi}$ con gli assi sono allineati col fuoco del profilo (fuoco della parabola) e col punto di contatto del 3° asse con la $P_{\frac{R}{n},\,\varphi}$; analogamente i punti di contatto della $P_{\frac{R}{n},\,\varphi}$ con gli assi sono allineati con F' (fuoco della parabola) e con il punto di contatto del 3° asse con la $P_{f,\,\varphi}$. Il punto di contatto del 3° asse con la $E_{\frac{R}{n},\,f}$ è il punto medio di FF'.

Variando φ mentre il 3° asse inviluppa l'ellisse $E_{\frac{R}{n},\,f}$ il punto di contatto del 3° asse con $P_{f,\,\varphi}$ descrive la curva razionale del 4° ordine

$$(28)\qquad \left(\frac{R}{n}-f\right)^4 x^2+\left(\frac{R}{n}+f\right)^4 y^2=16f^2x^2y^2$$

ed analogamente per il punto di contatto del 3° asse con la $P_{\frac{R}{n},\,\varphi}$.

Se l'angolo φ è zero, cioè se il 1° e 2° asse coincidono, F ed F' giacciono sull'asse x e le parabole si riducono a due fasci di raggi con F ed F' per sostegno: il 3° asse è allora perpendicolare al 2° asse nel punto di mezzo fra F e F' cioè nel punto in cui l'ellisse incontra l'asse x.

Esiste dunque allora un centro fisso di pressione (punto F) per il quale debbon passare le linee d'azione della forza sostentatrice per qualunque angolo di attacco.

È questo il caso che si verifica per esempio quando l'ostacolo è costituito da una lamina piana ([14]). Se questa ha la lunghezza $2a$,

([14]) Vedi p. es. MARIO PASCAL, *Le ricerche areodinamiche di Kutta e di Joukowski*. Napoli, Pellerano, 1925, p. 33.

Colgo l'occasione per avvertire che il calcolo per trovare il momento della forza sostentatrice (p. 39 del citato lavoro) è condotto come se la relazione fra ζ e z fosse $\zeta = z + (z^2 + a^2)^{1/2}$: il risultato finale però è, a meno del segno, identico a quello qui ottenuto, e non è meraviglia perchè infatti la cosa si riduce a considerar l'ostacolo disposto sull'asse immaginario invece che su quello reale.

è disposta lungo l'asse reale ed il suo punto medio è l'origine, la rappresentazione dell'area esterna al segmento sull'area esterna ad un cerchio di raggio a e col centro nell'origine del piano ζ, si ottiene mediante la funzione

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - a^2};$$

nel campo esterno al cerchio vale cioè lo sviluppo

$$\zeta = 2\left(z - \frac{a^2}{4z} - \frac{a^4}{16z^3} + \dots\right).$$

Nelle formule date precedentemente si deve porre dunque $n = 2$, $R = a$, $\varphi = 0$, $f = -\frac{nt_1}{R} = \frac{nd^2}{R} = \frac{a}{2}$; e si ha allora subito come forza sostentatrice il valore

$$P = 2\pi\rho a V_\infty^2 \operatorname{sen} \beta$$

e come momento rispetto all'origine

$$M_0 = \pi\rho V_\infty^2 a^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta = \frac{Pa \cos \beta}{2}.$$

La parabola delle forze sostentatrici si riduce al punto $F\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right)$, e poichè qui $\frac{R}{n}$ e f sono uguali, allo stesso punto si riduce la parabola $P_{\frac{R}{n},\,\varphi}$. Si verifica qui inoltre che il centro della circuitazione è indipendente da β e coincide anch'esso col punto F.

È chiaro che con siffatti procedimenti si possono ottenere con grande rapidità risultati che per altra via richiederebbero calcoli lunghi e laboriosi.

Quanto abbiam detto può, noi crediamo, dare una idea di queste fruttuose ricerche che rappresentano senza dubbio un progresso notevole nelle indagini sul meccanismo delle forze che un fluido esercita su un ostacolo.

Napoli, settembre 1925.

MARIO PASCAL