Bollettino Unione Matematica Italiana

Leonida Tonelli

Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.1, p. 1–2.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

PICCOLE NOTE

Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.

Nota di LEONIDA TONELLI

N. SALTYKOW, in una *Note sur l'existence des intégrales des équations différentielles*, inserita in un recente fascicolo del « Journal de Mathématiques Pures et Appliquées » (T. IV, 1925; pp. 271-280) (¹), indica un elegante procedimento, col quale Egli crede di poter stabilire l'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, sia nel caso di una sola equazione, sia in quello di un sistema. Se non che, come risulterà da quanto qui esporremo, il procedimento del SALTYKOW non permette, in nessuno dei due casi indicati, di raggiungere lo scopo per il quale fu ideato, e le funzioni che con esso si costruiscono, e che il SALTYKOW dà come integrali delle equazioni considerate, non soddisfano affatto a tali equazioni.

Ci limiteremo a dimostrare quanto abbiamo asserito nel caso di una sola equazione.

Sia adunque l'equazione

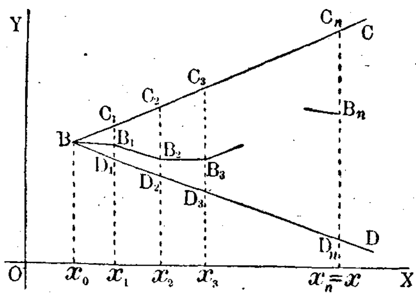
$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

con $f(x, y)$ funzione continua nel rettangolo $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ $(a > 0,\ b > 0)$; e, indicato con M il massimo modulo della $f(x, y)$ in tale rettangolo, si chiami h il minore de due numeri a e $b : M$.

Per dimostrare l'esistenza di un integrale della (1), uscent dal punto $B(x_0, y_0)$, il SALTYKOW immagina il seguente procedimento.

(¹) V. anche la Nota preliminare nei « Comptes rendus » T. 179 (1924, 2° sem.), pp. 590-592.

Considerata una x qualunque di $(x_0, x_0 + h)$, si divida l'intervallo (x_0, x) in parti, mediante i punti $x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = x$, e tracciate nel piano (x, y) le due semirette BC e BD, aventi rispettivamente per coefficienti angolari M e $-M$, si indichino con C_1, C_2, $C_3, ...$, C_n e D_1, D_2, $D_3, ...$, D_n, rispettivamente i punti di BC e BD aventi per ascisse x_1, x_2, $x_3, ...$, x_n. Detti poi m_0, m_1, $m_2, ...$ i minimi della funzione $f(x, y)$, rispettivamente nel triangolo BC_1D_1 e nei trapezi $C_1C_2D_2D_1$, $C_2C_3D_3D_2, ...$, si costruisca la poligonale $BB_1B_2 .... B_n$ avente i vertici di ascisse rispettive x_0, x_1, $x_2, ...$, x_n, e tale che i suoi lati BB_1, $B_1B_2, ...$ abbiano per coefficienti angolari rispettivamente m_0, $m_1, ...$. Il SALTYKOW dimostra che, quando tutte le differenze $x_{r+1} - x_r$ tendono a zero, la funzione che rappresenta la poligonale $BB_1B_2 .... B_n$ tende ad una funzione limite unica $y(x)$. Questa funzione $y(x)$ dovrebbe poi essere, secondo il SALTYKOW, un integrale della equazione (1).



Nella Nota citata è dimostrato soltanto che la $y(x)$ è continua, derivabile e soddisfa alla (1) nel punto iniziale $x = x_0$; ma ciò non basta, perchè il comportamento della $y(x)$ negli altri punti è ben diverso da quello che ha in x_0. E d'altra parte può osservarsi immediatamente che la $y(x)$ non può essere, almeno nel caso generale, un integrale della (1), perchè, se invece di questa equazione si considera la

$$y' = f(x, 2y_0 - y), \tag{2}$$

la costruzione dianzi eseguita, applicata a questa nuova equazione, conduce alla medesima funzione $y(x)$, mentre è chiaro che le due equazioni (1) e (2) non hanno sempre un integrale comune.

Indicando con $m(x)$ il minimo valore assunto dalla $f(x, y)$ sul segmento della parallela all'asse delle y, di ascissa x, compreso fra i raggi BC e BD, la funzione $y(x)$, costruita col procedimento sopra esposto, è, per ogni x di $(x_0, x_0 + h)$, continua e derivabile, e la sua derivata è data da $y' = m(x)$, come si dimostra facilmente. E pertanto, se abbiamo, per esempio, l'equazione $y' = y$, con $a = 1$, $b = 1$, $x_0 = y_0 = 0$, otteniamo $M = 1$ e $h = 1$, e la funzione costruita col procedimento del SALTYKOW è quella che verifica l'equazione $y' = -x$, ossia $y = -x^2 : 2$, la quale non è un integrale dell'equazione $y' = y$.