
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TULLIO LEVI-CIVITA

Sullo scostamento geodetico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.2, p. 60–64.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_60_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sullo scostamento geodetico.

Nota di T. LEVI-CIVITA

(Sunto di una memoria in corso di stampa nel volume 97 dei Mathematische Annalen, che sarà dedicata alla memoria di Riemann, di cui ricorre quest'anno il centenario dalla nascita).

Sopra una generica superficie, lo scostamento normale y , fra una geodetica assegnata B (*base*) e una qualsiasi geodetica infinitamente vicina g , verifica notoriamente l'equazione di JACOBI

$$(J) \quad \frac{d^2 y}{d\sigma^2} + Ky = 0,$$

in cui σ designa l'arco di B e $K\sigma$ la curvatura gaussiana della superficie. Si tratta in sostanza di una equazione alle variazioni, spettante alle geodetiche della superficie, a partire dalla B ; e se ne traggono, come ebbe a rilevare il BONNET fino dal 1850, conseguenze notevolissime sull'andamento delle geodetiche nell'immediata prossimità della base e sulle questioni di stabilità che vi si collegano.

Come si vede, la natura della superficie interviene soltanto pel tramite della curvatura totale K . E del resto è chiaro *a priori*, trattandosi di geodetiche e di scostamenti normali, che la questione ha carattere intrinseco, cioè concerne unicamente la metrica

della superficie definita dal suo ds^2 (e non la configurazione, o le configurazioni, che essa può assumere nello spazio).

Si è così spontaneamente condotti a proporsi l' analogo studio dello scostamento geodetico per una varietà riemanniana V_n a un numero qualunque di dimensioni. L' impostazione del problema è in verità molto semplice, in quanto si possiedono da tempo (per es. sotto la classica forma di LAGRANGE) le equazioni differenziali delle geodetiche, sicchè tutto si riduce a esplicitarne le equazioni alle variazioni a partire da una base assegnata B . Per rendere espressiva la formula finale, cui si perviene in tal guisa, conviene anzi tutto precisare il significato dei simboli e la loro interpretazione geometrica.

Sia P un punto generico della base B , e si consideri la superficie geodetica Σ di polo P , normale a B , cioè la superficie costituita dalle ∞^{n-2} geodetiche spiccate da P ortogonalmente a B . Questa segnerà ogni geodetica g , infinitamente vicina a B , in un certo punto M , da ritenersi (nel campo che si considera) infinitamente vicino a P . Perciò, qualunque siano le coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ cui si immagina riferita la varietà V_n , le componenti contravarianti ξ^r ($r=1, 2, \dots, n$) del vettore $\xi=PM$ si identificano cogli incrementi delle corrispondenti coordinate x_r nel passaggio da P ad M .

È noto ⁽¹⁾ che, se si considera in generale un vettore ξ funzione dei punti P di una linea B (o, ciò che è lo stesso, del suo arco σ) dalle componenti contravarianti ξ^r (per combinazione di esse e delle loro derivate rapporto a σ) si desume un nuovo sistema *contravariante* $(D\xi)^r$ definito come segue:

$$(1) \quad (D\xi)^r = \frac{d\xi^r}{d\sigma} + \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} jh \\ r \end{matrix} \right\} b^j \xi^h \quad (r=1, 2, \dots, n),$$

dove $b^j(\sigma)$ rappresentano i parametri della linea B nel punto generico P , e $\left\{ \begin{matrix} jh \\ r \end{matrix} \right\}$ i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie, pure in P .

Il vettore $D\xi$, definito dalle componenti contravarianti (1), fu introdotto dal BIANCHI ⁽²⁾ che lo chiamò associato di ξ . Parmi tuttavia che si imponga la denominazione di *vettore derivato*, perchè esso generalizza in modo ovvio la derivata vettoriale di

⁽¹⁾ Cfr. per es. le mie *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (raccolte dal dott. Enrico Persico), Roma, Stocck, 1925, p. 159.

⁽²⁾ Pp. 788-811 del vol. II (3^a ediz.) delle *Lezioni di geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1924.

uso corrente in geometria euclidea. Infatti, se V_n è euclidea e riferita a coordinate cartesiane, si annullano i simboli di CHRISTOFFEL e le componenti $(D\xi)^r$ si riducono precisamente alle derivate delle componenti omologhe del vettore ξ . L'annullarsi caratterizza, negli spazi euclidei, la costanza del vettore ξ ; in una V_n qualsiasi, il parallelismo (o, se si vuole, l'equipollenza) lungo la curva B di trasporto.

Naturalmente anche $D\xi$ ammette un vettore derivato che si indica con $D^2\xi$ e costituisce il secondo derivato di $\xi(\sigma)$. Le sue componenti contravarianti si presentano, a norma della (1), come combinazioni lineari delle ξ^r , $\frac{d\xi^r}{d\sigma}$, $\frac{d^2\xi^r}{d\sigma^2}$.

Ciò premesso, ecco le equazioni alle variazioni cui si è in definitiva condotti:

$$(I) \quad (D^2\xi)^r = - \sum_1^n {}_{ikh} \{ ir, hk \} b^i b^h \xi^k \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Il loro carattere invariantivo (rispetto alla scelta delle coordinate) è manifesto, perchè entrambi i membri costituiscono un sistema contravariante semplice. Alle n equazioni differenziali del secondo ordine (I) nelle $\xi^r(\sigma)$ va associata l'equazione (in termini finiti nelle stesse ξ^r)

$$(2) \quad \sum_1^n b_r \xi^r = 0,$$

in cui le b_r rappresentano i *momenti* della curva B : una tale equazione esprime manifestamente l'ortogonalità fra il vettore $\xi = PM$ e la curva B . È facile riconoscere la compatibilità di tale relazione col sistema differenziale (I), potendosi dimostrare che esso ammette in ogni caso l'integrale primo

$$(II) \quad \sum_1^n b_r (D\xi)^r = \lambda \quad (\lambda \text{ costante}),$$

equazione che è a sua volta integrabile sotto la forma

$$(III) \quad \sum_1^n b_r \xi^r = \lambda \sigma + C \quad (C \text{ costante}).$$

Perciò la (2) — o, sotto forma geometrica, la condizione che lo spostamento PM sia normale a B — implica unicamente particolarizzazione dei valori di due costanti di integrazione ($\lambda = C = 0$).

Se lo scostamento fra B e g si apprezza in altro modo, cioè se la corrispondenza fra i punti P di B e M di g si stabilisce con legge diversa dalla normalità del vettore PM alla base B ,

si può ancora assegnare il sistema di equazioni da sostituirsi alle (I), (2). Esso risulta costituito da $n + 1$ equazioni con altrettante incognite: le n componenti contravarianti ξ^r del vettore PM e un' ausiliaria λ . Di queste equazioni, le prime n differiscono dalle (I) soltanto per un termine addizionale in cui interviene $\frac{d\lambda}{ds}$; l' $(n + 1)^{esima}$ dipende dalla legge di corrispondenza che si vuol adottare.

Riferendosi allo scostamento normale (che è quello più spontaneamente suggerito dalla natura della questione), e quindi al sistema (I), si è tratti a domandarsi se e sino a qual punto lo si possa semplificare, sostituendo alle coordinate generiche x altre opportune variabili. Una riduzione notevole si ha introducendo coordinate y le quali siano *localmente* cartesiane in tutti i punti di B : che ciò sia possibile fu rilevato per la prima volta dal FERMI ⁽¹⁾, e viene da me sviluppato (con qualche complemento) seguendo la via originariamente battuta da RIEMANN per costruire coordinate localmente geodetiche in un unico punto.

Con riferimento alle coordinate y , di cui la y_n si identifica colla variabile indipendente σ e le altre y_α (lungo una g) colle componenti (normali a B) del vettore PM , il sistema (I) assume la forma

$$(I') \quad \frac{d^2 y_\alpha}{ds^2} = - \sum_{\beta=1}^{n-1} g_{\alpha\beta} \{ n\alpha, \beta \} y_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-1),$$

l' n^{esima} equazione riducendosi ad una identità, al pari della (2).

Questo sistema (I') realizza così il duplice vantaggio di presentare il problema già ridotto all'ordine $2(n-1)$ [determinazione di $n-1$ funzioni da altrettante equazioni del secondo ordine] e di non contenere le derivate prime delle funzioni incognite y . Va rilevato tuttavia che, mentre il sistema generale (I) si forma senz'altro con operazioni di derivazione a partire dai dati della questione (metrica della varietà e geodetica base), per procurarsi coordinate y (localmente cartesiane lungo B), bisogna ricorrere ad un trasporto per parallelismo lungo B , il che analiticamente equivale ad una operazione ausiliaria d'ordine $n-2$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ *Sopra i fenomeni che avvengono in prossimità di una linea oraria*, Rend. Acc. Lincei, vol. XXI, pp. 21-23, 51-52.

⁽²⁾ Si tratta infatti, in quanto B è geodetica e quindi autoparallela, di integrare un sistema di n equazioni lineari del primo ordine, di cui si conosce un integrale quadratico, nonchè una soluzione particolare (quella fornita dalla stessa geodetica di trasporto).

Per $n=2$ il sistema (I') riporta all'equazione (J) di JACOBI, venendo meno la preventiva integrazione ausiliaria, in accordo col fatto notorio che la formazione della (J), e, per essa, della curvatura K , richiede soltanto derivazioni.

Tornando a n qualunque, sarebbe interessante da un lato d'esaminare in modo sistematico sotto quali condizioni siano possibili ulteriori riduzioni del sistema (I); dall'altro di trarne criteri di stabilità (o almeno di instabilità) per il movimento dei sistemi olonomi sotto l'azione di forze conservative: come è ben noto, le traiettorie di tali moti si possono sempre risguardare come geodetiche di una opportuna V_n . Codeste questioni sono soltanto segnalate nella memoria qui riassunta.