
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MAURO PICONE

Sul determinante di Gram

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.2, p. 81-84.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_81_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_81_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

Sul determinante di Gram.

Nota di MAURO PICONE

Sia T un dominio limitato dello spazio a r dimensioni e siano $P_1(x_{11}, \dots, x_{1r}), \dots, P_n(x_{n1}, \dots, x_{nr})$, n punti variabili in T . Indicherò con $T^{(n)}$ il dominio dello spazio a nr dimensioni descritto dal punto $Q(x_{11}, \dots, x_{1r}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nr})$ al variare in tutti i modi possibili, ed indipendentemente l'uno dall'altro, dei punti $P_1, \dots, P_n$ in T . Indicherò con dT e con $dT^{(n)}$ gli elementi dei domini T e $T^{(n)}$.

Date le funzioni reali $f(P)$, $\phi_1(P), \dots, \phi_n(P)$ continue in T , la

$f(P)$ essendo ivi mai negativa, poniamo:

$$\Gamma[f(P)] = \begin{vmatrix} \int_T f\psi_1^2 dT & \dots & \int_T f\psi_1\psi_n dT \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_T f\psi_1\psi_n dT & \dots & \int_T f\psi_n^2 dT \end{vmatrix}.$$

Sussiste il teorema: *Ad ogni variazione della $f(P)$ non negativa in T corrisponde una variazione non negativa del determinante di GRAM $\Gamma[f(P)]$ e, se le funzioni $\psi_1, \dots, \psi_n$ sono in T linearmente indipendenti, ad ogni variazione della $f(P)$ quasi ovunque positiva in T corrisponde una variazione positiva di $\Gamma[f(P)]$.*

Tale teorema è conseguenza immediata della seguente relazione osservata la prima volta da FISCHER ⁽¹⁾: Se $\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P)$ sono funzioni continue in T , si ha:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \int_T \varphi_1^2 dT & \dots & \int_T \varphi_1 \varphi_n dT \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_T \varphi_1 \varphi_n dT & \dots & \int_T \varphi_n^2 dT \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} \int_{T^{(n)}} \begin{vmatrix} \varphi_1(P_1) & \dots & \varphi_n(P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(P_n) & \dots & \varphi_n(P_n) \end{vmatrix}^2 dT^{(n)}.$$

Ed inverso, posto nella (1), $\varphi_i = \sqrt{f}\psi_i$, si ricava

$$\Gamma[f(P)] = \frac{1}{n!} \int_{T^{(n)}} f(P_1) \dots f(P_n) \begin{vmatrix} \psi_1(P_1) & \dots & \psi_n(P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(P_n) & \dots & \psi_n(P_n) \end{vmatrix}^2 dT^{(n)}.$$

Del teorema è stata data, nel n. 5 dell'anno passato di questo « Bollettino », una dimostrazione assai semplice dal collega A. SIGNORINI, per il caso particolare $n=2$, indipendentemente dall'indicata relazione di FISCHER.

Ma alla relazione (1) e al criterio fornito dal determinante di GRAM per l'indipendenza lineare delle funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, facilmente e nello stesso tempo si perviene col seguente semplicissimo metodo elementare che vado a ricordare, il quale — evitando, fra l'altro, la consueta applicazione della teoria delle forme quadratiche — conviene che sia tenuto presente nell'insegnamento, come ho avuto occasione di rilevare nel mio corso di *Istituzioni di Analisi superiore* di quest'anno.

⁽¹⁾ Cfr. KNESER: *Zur Theorie der Determinanten*. [SCHWARZ: *Mathematische Abhandlungen zu s. 50 jährigen Doktorjubiläum*, Berlin 1914], pp. 177-191.

