
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MAURO PICONE

Sul problema di Dirichlet per la corona circolare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.3, p. 114–118.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_114_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_114_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul problema di Dirichlet per la corona circolare.

Nota di MAURO PICONE

Non ostante che la formola di risoluzione del problema di DIRICHLET per la corona circolare sia stata data da gran tempo e si trovi esposta in parecchi trattati d'Analisi, pure essa è stata sempre stabilita — che io mi sappia — nell'ipotesi restrittiva che i valori assegnati alla incognita funzione armonica sulle due circonferenze limitanti la corona siano tali funzioni della comune anomalia dei punti di quelle circonferenze da ammettere, ciascuna uno sviluppo in serie di FOURIER uniformemente convergente. Ora, laddove è certo necessario, per la natura stessa del problema ammettere la continuità e la periodicità (col periodo 2π) delle dette funzioni, non così è per l'ulteriore ipotesi della loro sviluppabilità in serie di FOURIER uniformemente convergente; poichè come ben stabiliscono i metodi generali di POINCARÉ, bastano

le sole prime necessarie ipotesi per assicurare l'esistenza della richiesta funzione armonica.

Nel mio corso di *Analisi superiore* che ebbi l'onore di tenere all'Università di Pisa nell'anno scolastico 1923-924, esposi una semplicissima soluzione del problema in considerazione, nelle indicate sole ipotesi necessarie, basata sul teorema di FEJÉR relativo all'approssimazione mediante polinomi trigonometrici di una funzione continua e periodica. Oggi, visto che, anche nella recentissima ultima edizione del volume secondo del suo *Traité d'Analyse*, il PICARD, pur avendo già nell'ultima edizione del primo, svolto compiutamente il metodo di FEJÉR di sommazione delle serie di FOURIER, risponde la soluzione del problema di DIRICHLET per la corona circolare, mettendosi nelle sopradette ipotesi restrittive, mi appare non del tutto fuori di luogo far conoscere al pubblico matematico la mia soluzione già esposta agli studenti di Pisa, e ciò mi permetto di fare con la presente nota.

Naturalmente, la formola risolutiva del problema a cui si perviene col mio metodo coincide con quella classica, la quale, dopo ciò, viene ad assumere maggior portata.

Siano $f(\theta)$ e $F(\theta)$ due funzioni continue e periodiche, di periodo 2π , arbitrariamente assegnate nell'intervallo $(0, 2\pi)$, le cui coordinate di FOURIER siano rispettivamente a_k e b_k ; A_k e B_k . Posto

$$s_n(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

$$S_n(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta),$$

si ha, in forza del teorema di FEJÉR, uniformemente in $(0, 2\pi)$

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\theta) = f(\theta), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\theta) = F(\theta).$$

Si voglia ora costruire una funzione u armonica nella corona circolare T , limitata dalle circonferenze c e C , aventi il centro nell'origine delle coordinate e, rispettivamente, i raggi r e R ($r < R$), prescrivendo alla funzione di assumere su c i valori $f(\theta)$ e su C i valori $F(\theta)$. A tale scopo, per ogni valore dell'indice n , considereremo la funzione, armonica in T ,

$$u_n(\rho, \theta) = \alpha_0 + \alpha'_0 \log \rho +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left[\left(\alpha_k \rho^k + \frac{\alpha'_k}{\rho^k} \right) \cos k\theta + \left(\beta_k \rho^k + \frac{\beta'_k}{\rho^k} \right) \sin k\theta \right] \right\},$$

e determineremo le costanti $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_k, \alpha'_k, \beta_k, \beta'_k$ in guisa che riesca

$$(2) \quad u_n(r, \theta) \equiv s_n(\theta), \quad u_n(R, \theta) \equiv S_n(\theta).$$

Basta perciò porre, se si indica con q il rapporto r/R ,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{A_0 \log r - a_0 \log R}{2 \log q}, & \alpha'_0 &= -\frac{A_0 - a_0}{2 \log q}, \\ \alpha_k &= \frac{1}{R^k} \frac{A_k - a_k q^k}{1 - q^{2k}}, & \alpha'_k &= -r^k \frac{A_k q^k - a_k}{1 - q^{2k}}, \\ \beta_k &= \frac{1}{R^k} \frac{B_k - b_k q^k}{1 - q^{2k}}, & \beta'_k &= -r^k \frac{B_k q^k - b_k}{1 - q^{2k}}. \end{aligned}$$

Si ha allora:

$$(3) \quad \begin{aligned} u_n(\rho, \theta) &= \frac{A_0 \log r - a_0 \log R}{2 \log q} - \frac{A_0 - a_0}{2 \log q} \log \rho + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left\{ \left[\frac{A_k - a_k q^k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k - \frac{A_k q^k - a_k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \right] \cos k\theta + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{B_k - b_k q^k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k - \frac{B_k q^k - b_k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \right] \sin k\theta \right\}. \end{aligned}$$

In tal modo si ottiene la successione

$$(4) \quad u_1(\rho, \theta), \quad u_2(\rho, \theta), \dots, \quad u_n(\rho, \theta), \dots,$$

di funzioni armoniche in T , la quale, per le (1) e (2), converge uniformemente sulla frontiera di T ; su c verso $f(\theta)$ e su C verso $F(\theta)$. Ne segue, in forza del teorema di HARNACK, che la successione (4) converge uniformemente in T , verso una funzione armonica in T , la quale, su c e su C , assume rispettivamente valori $f(\theta)$ e $F(\theta)$. Adunque:

La formola (3) e la seguente

$$u(\rho, \theta) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\rho, \theta)$$

risolvono il problema di Dirichlet per la corona circolare nelle condizioni più generali.

Se consideriamo la serie che si ottiene dal secondo membro della (3) cangiandovi in ∞ l'estremo superiore della sommatoria e privando ciascun termine di questa del fattore $1 - \frac{k}{n}$, si vede che essa, nei punti interni a T , è assolutamente convergente,

in ogni insieme chiuso interno a T , anche uniformemente convergente, e poichè la somma al secondo membro della (3) non è che la media aritmetica dei primi n termini della considerata serie, possiamo dire che:

Comunque si definiscano nell'intervallo $(0, 2\pi)$ le due funzioni continue $f(\theta)$ e $F(\theta)$, periodiche e di periodo 2π , la funzione u armonica nella corona circolare T , obbligata a prendere sulle due circonferenze c e C limitanti la corona rispettivamente i valori $f(\theta)$ e $F(\theta)$ è data, per ogni punto interno a T , dalla serie

$$(5) \quad u_n(\rho, \theta) = \frac{A_0 \log r - a_0 \log R}{2 \log q} - \frac{A_0 - a_0}{2 \log q} \log \rho + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{A_k - a_k q^k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k - \frac{A_k q^k - a_k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{r}{\rho} \right)^k \right] \cos k\theta + \right. \\ \left. + \left[\frac{B_k - b_k q^k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k - \frac{B_k q^k - b_k}{1 - q^{2k}} \left(\frac{r}{\rho} \right)^k \right] \sin k\theta \right\},$$

ove; r e R sono, rispettivamente, i raggi di c e di C , $q = r/R$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha d\alpha, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha d\alpha, \\ A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos k\alpha d\alpha, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin k\alpha d\alpha;$$

e pertanto, nei punti interni a T , la u è anche data dalla formola

$$(6) \quad u(\rho, \theta) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \left[\frac{\log r - \log \rho}{\log q} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\rho}{R} \right)^k - q^k \left(\frac{r}{\rho} \right)^k \right\} \frac{\cos k(\alpha - \theta)}{1 - q^{2k}} \right] d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[\frac{\log R - \log \rho}{\log q} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ q^k \left(\frac{\rho}{R} \right)^k - \left(\frac{r}{\rho} \right)^k \right\} \frac{\cos k(\alpha - \theta)}{1 - q^{2k}} \right] d\alpha,$$

la quale però perde di significato sulla frontiera di T .

La (5) è la formola classica che può valere a rappresentare la u anche sulla frontiera di T se, soltanto, si suppongono $f(\theta)$ e $F(\theta)$ svilupparli in serie di FOURIER. La (6) costituisce, evidentemente, una generalizzazione della formola di POISSON che risolve il problema di DIRICHLET per il cerchio e, d'altronde, a questa si riduce se in essa si passa al limite per $q \rightarrow 0$ e $r \rightarrow 0$.

Si potrebbe anche assumere la formola (6) e, imitando il metodo che si segue nel classico studio dell'integrale di POISSON, verificare che, nella sola ipotesi della continuità e periodicità di $f(\theta)$ e di $F(\theta)$, essa rappresenta una funzione armonica in T che sulla frontiera assume i valori $f(\theta)$ e $F(\theta)$. Noi però possiamo dispensarci da tale laboriosa verifica.

Naturalmente, il nostro metodo, senza veruna modificazione, può anche applicarsi per la deduzione della sopradetta formola di POISSON, e si ha allora una notevole semplificazione del metodo che, per tale scopo, segue il LEBESGUE ai n.º 30 e 31 delle sue *Leçons sur les séries trigonometriques*.

Credo che il mio metodo sia suscettibile d'essere esteso per la trattazione, nelle condizioni più generali possibili, dei classici problemi che il DINI risolve nella bella Memoria: *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^2 u = 0$* [Annali di Matematica, tomo V della serie II (1871-1873), pp. 305-345], Memoria oggi così ingiustamente dimenticata!

A proposito, a quando la raccolta delle insigni opere del DINI, nella quale gli studiosi troverebbero inestimabili tesori e l'Italia grandissimo onore?

Napoli, 21 aprile 1926.