BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO BOMPIANI

Per lo studio proiettivo-differenziale delle singolarità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.3, p. 118–120.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_118_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Per lo studio proiettivo-differenziale delle singularità.

Nota di ENRICO BOMPIANI

La teoria proiettivo-differenziale delle curve e delle superficie esclude sistematicamente lo studio dei punti singolari; mentre è chiaro che, anche per enti algebrici, lo studio di *una* singularità è proprio di pertinenza della geometria proiettiva differenziale.

D'altra parte non si può nemmeno dire che le singularità possano evitarsi in uno studio delle curve o superficie in generale; si presenta p. es. una curva piana con un flesso quando si proietta una curva sghemba da un punto di un suo piano osculatore (come appunto si fa per studiare l'intorno di un punto generico della curva sghemba) oppure quando si sega una superficie con un piano passante per una sua tangente asintotica.

Consideriamo appunto un flesso di una curva piana.

Studiarne l'intorno proiettivo di un certo ordine vuol dire sostituire, alla considerazione (intuitiva) dei punti infinitamente vicini, elementi geometrici capaci di caratterizzare tutte le curve aventi in comune quell'intorno.

Sia data (in coordinate proiettive non omogenee x, y) la curva piana C di equazione

$$(1) \quad y = bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 + gx^7 + hx^8 + \dots$$

con flesso in $O(0, 0)$, $b \neq 0$. È inutile tentare di approssimarla (oltre il 1° ordine) con una curva che non abbia un flesso in O . Poichè b non ha significato geometrico (se si vuole, dipende dall'unità di misura), si avrà interesse a considerare almeno il termine in x^4 , cioè, nell'ipotesi più semplice, cubiche a contatto 5-punto (almeno) con C .

Ne esistono infinite: se ne può determinare una con la condizione che abbia una cuspidale in un punto assegnato $(x_0, y_0) \neq O$. Orbene:

La tangente cuspidale ad una qualsiasi delle cubiche (cuspidate) a contatto 5-punto con C in O passa per un ben determinato punto $O_1(2b/c, 0)$ della tangente in O , dipendente dall'intorno del 4° ordine di O su C . In altri termini: O_1 rappresenta l'intorno del 4° ordine di O su C .

Passiamo all'intorno del 5° ordine.

Le cubiche (cuspidate) aventi contatto del 5° ordine con C in O hanno le loro cuspidi sopra una retta per O , che rappresenta detto intorno.

Fra queste cubiche ve n'è una a contatto del 6° ordine; la sua cuspidale O_2 rappresenta l'intorno del 6° ordine di O su C (insieme ad O ed O_1).

Presi O, O_1, O_2 come vertici di un trilatero di riferimento la (1) si scrive

$$(2) \quad y = bx^3 + gx^7 + hx^8 + \dots$$

L'intorno del 7° ordine si può rappresentare con la cubica a contatto 8-punto, con C in O , passante per O_2 e si potrebbe facilmente servirsene per fissare un punto unità in modo invariante (proiettivamente).

Sicchè l'intorno dell'8° ordine (e così i successivi) dà un invariante.

È inutile tentare di approssimare quest'intorno con una cubica (a meno che sia $h=0$, nel qual caso tutte le ∞^1 cubiche a contatto 8-punto in O hanno contatto 9-punto); si può invece con una quartica avente, oltre che il contatto voluto in O con C , il punto O_2 doppio con tangente nodale O_2O e tangente in O_1 alla O_1O_2 .

Questa quartica e la cubica cuspidata in O_2 si tagliano ulteriormente in un punto (per cui passa anche l'altra tangente

nodale alla quartica in O_2); preso come punto unità, la (2) si scrive

$$(3) \quad y = x^3 + gx^7 - gx^8 + \dots$$

Uno dei birapporti dei 4 punti in cui p. es. la retta per O e per il punto unità taglia la quartica dà il significato geometrico dell'invariante g .