
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GOFFREDO VITALI

**Sulla condizione necessaria e
sufficiente perchè la espressione
 $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ sia un
differenziale esatto**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.3, p. 123–124.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_123_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_123_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

Sulla condizione necessaria e sufficiente perchè la espressione
 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ **sia un differenziale esatto.**

Nota di GOFFREDO VITALI

Nei trattati di Calcolo la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione

$$(1) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

sia un differenziale esatto è limitata al caso in cui $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ sono derivabili.

Mi sono chiesto qual'è la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione (1) sia un differenziale esatto anche quando le funzioni $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ non sono derivabili.

Ho osservato che se $f(x, y)$ è la funzione il cui differenziale totale è espresso dalla (1), si ha:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y)$$

e

$$f(x, y) = \int_{y_0}^y N(x, y)dy + \psi(x)$$

cioè, per qualsiasi valore di x e y , si deve avere:

$$(2) \quad \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x, y)dy + \psi(x).$$

Ponendo $x = x_0$ si ha:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy + \psi(x_0)$$

e ponendo $y = y_0$ si ha:

$$\psi(x) = \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \varphi(y_0).$$

Inoltre per $x = x_0$ e per $y = y_0$, si ha

$$\varphi(y_0) = \psi(x_0).$$

Sostituendo nella (2) i valori di $\varphi(y)$ e $\psi(x)$ si deduce che se $f(x, y)$ ammette per differenziale totale la (1), deve essere:

$$(3) \quad \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx.$$

La (3) è anche condizione sufficiente.

Infatti posto

$$(4) \quad f(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

per la (3) si ha anche:

$$(5) \quad f(x, y) = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx.$$

Derivando la (4) rispetto ad x si ha:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

e derivando la (5) rispetto ad y si ha:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

da cui si deduce che:

$$df(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

cioè che il differenziale totale di $f(x, y)$ è dato dalla (1).

Si deduce quindi che *la condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) sia un differenziale esatto, anche quando $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ non sono derivabili, è che sia verificata la (3).*

Perchè sia valida la dimostrazione è sufficiente che le funzioni $M(x, y)$ e $N(x, y)$ siano continue.

Ferrara, marzo 1926.