

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GOFFREDO VITALI

**Sulla condizione necessaria e  
sufficiente perchè la espressione  
 $M(x, y) dx + N(x, y) dy$  sia un  
differenziale esatto**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. 5 (1926), n.3, p. 123–124.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_123_0)  
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1926\\_1\\_5\\_3\\_123\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_123_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1926.

**Sulla condizione necessaria e sufficiente perchè la espressione**  
 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  **sia un differenziale esatto.**

Nota di GOFFREDO VITALI

Nei trattati di Calcolo la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione

$$(1) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

sia un differenziale esatto è limitata al caso in cui  $M(x, y)$  ed  $N(x, y)$  sono derivabili.

Mi sono chiesto qual'è la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione (1) sia un differenziale esatto anche quando le funzioni  $M(x, y)$  ed  $N(x, y)$  non sono derivabili.

Ho osservato che se  $f(x, y)$  è la funzione il cui differenziale totale è espresso dalla (1), si ha:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y)$$

e

$$f(x, y) = \int_{y_0}^y N(x, y)dy + \psi(x)$$

cioè, per qualsiasi valore di  $x$  e  $y$ , si deve avere:

$$(2) \quad \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x, y)dy + \psi(x).$$

Ponendo  $x = x_0$  si ha:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy + \psi(x_0)$$

e ponendo  $y = y_0$  si ha:

$$\psi(x) = \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \varphi(y_0).$$

Inoltre per  $x = x_0$  e per  $y = y_0$ , si ha

$$\varphi(y_0) = \psi(x_0).$$

Sostituendo nella (2) i valori di  $\varphi(y)$  e  $\psi(x)$  si deduce che se  $f(x, y)$  ammette per differenziale totale la (1), deve essere:

$$(3) \quad \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx.$$

La (3) è anche condizione sufficiente.

Infatti posto

$$(4) \quad f(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

per la (3) si ha anche:

$$(5) \quad f(x, y) = \int_{y_0}^y N(x, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx.$$

Derivando la (4) rispetto ad  $x$  si ha:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

e derivando la (5) rispetto ad  $y$  si ha:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

da cui si deduce che:

$$df(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

cioè che il differenziale totale di  $f(x, y)$  è dato dalla (1).

Si deduce quindi che *la condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) sia un differenziale esatto, anche quando  $M(x, y)$  ed  $N(x, y)$  non sono derivabili, è che sia verificata la (3).*

Perchè sia valida la dimostrazione è sufficiente che le funzioni  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  siano continue.

Ferrara, marzo 1926.