Bollettino Unione Matematica Italiana

Goffredo Vitali

# Sulla condizione necessaria e sufficiente perchè la espressione $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ sia un differenziale esatto

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **5** (1926), n.3, p. 123–124.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

# Sulla condizione necessaria e sufficiente perchè la espressione $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sia un differenziale esatto.

Nota di GOFFREDO VITALI

Nei trattati di Calcolo la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione

$$(1) \qquad M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

sia un differenziale esatto è limitata al caso in cui $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ sono derivabili.

Mi sono chiesto qual'è la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione (1) sia un differenziale esatto anche quando le funzioni $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ non sono derivabili.

Ho osservato che se $f(x, y)$ è la funzione il cui differenziale totale è espresso dalla (1), si ha:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y)$$

e

$$f(x, y) = \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy + \psi(x)$$

cioè, per qualsiasi valore di $x$ e $y$, si deve avere:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy + \psi(x).$$

Ponendo $x = x_0$ si ha:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + \psi(x_0)$$

e ponendo $y = y_0$ si ha:

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \varphi(y_0).$$

Inoltre per $x = x_0$ e per $y = y_0$, si ha

$$\varphi(y_0) = \psi(x_0).$$

Sostituendo nella (2) i valori di $\varphi(y)$ e $\psi(x)$ si deduce che se $f(x, y)$ ammette per differenziale totale la (1), deve essere:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx. \tag{3}$$

La (3) è anche condizione sufficiente.

Infatti posto

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy \tag{4}$$

per la (3) si ha anche:

$$f(x, y) = \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx. \tag{5}$$

Derivando la (4) rispetto ad $x$ si ha:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

e derivando la (5) rispetto ad $y$ si ha:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

da cui si deduce che:

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

cioè che il differenziale totale di $f(x, y)$ è dato dalla (1).

Si deduce quindi che *la condizione necessaria e sufficiente perchè la* (1) *sia un differenziale esatto, anche quando* M(x, y) *ed* N(x, y) *non sono derivabili, è che sia verificata la* (3).

Perchè sia valida la dimostrazione è sufficiente che le funzioni $M(x, y)$ e $N(x, y)$ siano continue.

*Ferrara, marzo 1926.*